Негосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Международный институт экономики и права»
(НОУ МИЭП)

Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование экономических систем»

(для студентов факультета «Экономики и управления»)

Методические указания составил(и): ________________ *О.Ю. Худякова* *к.т.н., доц.*

____

Методические указания для проведения практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование экономических систем»

(для студентов ф-та «Экономики и управления»)

разработаны в соответствии с ФГОС ВО:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 38.04.01Экономика (уровень магистратуры) (Приказ Министерства образования и науки РФ от 30.03.2015г. № 321).

составлены на основании учебного плана:

утвержденного Учёным советом НОУ МИЭП .

Методические указания одобрены на заседании кафедры

Гуманитарных и естественно-научных дисциплин

Протокол от *20 февраля 2018 г.* № *7*

Срок действия программы: *2018/19* уч. год

Зав. кафедрой Т.В. Карпенкова

Основной целью поисковых и практических заданий является развитие и закрепление навыков по важному направлению, находящемуся на стыке экономики и прикладной математики – построению и применению математических моделей для анализа разнообразных экономических систем и процессов. Комплекс заданий вкупе с преамбулами к ним призван дать необходимый минимум базовых теоретических знаний по некоторым типовым группам математических моделей и способствовать формированию практических навыков и построения исследования таких моделей с использованием данных экономической и социальной статистики, что является необходимым требованием качественной подготовки экономиста. К числу таких навыков относятся: умение решать простейшие нелинейные задачи оптимизации в условиях ограничений с помощью метода множителей Лагранжа, вычислять средние, предельные значения эластичности различных функций, умение находить любую неизвестную из перечисленных величин по известному выражению для любой другой величины. В процессе освоения учебного материала настоящего курса обучающийся должен уметь исследовать и строить основные модели макро- и микроэкономических процессов, применяя адекватные методические подходы к исследованию этих моделей, понимать алгоритмы оценки параметров моделей с помощью методов эконометрического анализа, уметь обосновывать и объяснять полученные решения. Практические задания предусмотрены только по разделам 2–5.

Раздел 2. Модели согласования интересов экономических объектов. Микроуровень

Тема 6. Модели производства и предложения благ

Примеры решения типовых задач

6.1. Рассмотрим пример применения алгоритма нахождения функции общих затрат производства. Для нахождения функции общих затрат необходимо знать вид производственной функции и ограничения на общие затраты. Пусть производственная функция имеет вид Кобба-Дугласа $Q = L^{\alpha}K^{\beta}$. Найдем ее максимум при ограничениях на общие затраты вида $C = r_L L + r_K K$. Для этого составим функцию Лагранжа, приравняем к нулю ее производные по L и K и проведем некоторые преобразования:

$$F(L,K,\lambda) = L^{\alpha}K^{\beta} + \lambda(C - r_L L - r_K K)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial L} = \dfrac{\alpha L^{\alpha} K^{\beta}}{L} - \lambda r_{L} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial K} = \dfrac{\beta L^{\alpha} K^{\beta}}{K} - \lambda r_{K} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\alpha L^{\alpha} K^{\beta}}{L} = \lambda r_{L} \\ \dfrac{\beta L^{\alpha} K^{\beta}}{K} = \lambda r_{K} \end{matrix}.$$

Разделив в представленной системе первое уравнение на второе, получим следующее соотношение между L и K:

$$\frac{\alpha K}{\beta L} = \frac{r_L}{r_K} \Rightarrow \begin{cases} K = \dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} L \\ L = \dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} K \end{cases}.$$

Подставив по очереди полученные выражения в формулу для производственной функции, мы получим две функциональные зависимости $Q(L)$ и $Q(K)$, из которых можно получить выражения L через Q и, соответственно, K через Q:

$$\begin{cases} K = \dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} L \\ L = \dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} K \end{cases} \Rightarrow Q = L^{\alpha} K^{\beta} \Rightarrow \begin{cases} Q = \left(\dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} L \right)^{\beta} L^{\alpha} \\ Q = \left(\dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} K \right)^{\alpha} K^{\beta} \end{cases}.$$

Упростим полученные зависимости и подставим их в выражение для общих затрат $C = r_L L + r_K K$:

$$\begin{cases} Q = \left(\dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} L \right)^{\beta} L^{\alpha} \\ Q = \left(\dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} K \right)^{\alpha} K^{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \left(\dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} \right)^{\beta} L^{\alpha+\beta} \\ Q = \left(\dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} \right)^{\alpha} K^{\alpha+\beta} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} L = \left(\dfrac{r_L}{r_K} \times \dfrac{\beta}{\alpha} \right)^{-\beta/(\alpha+\beta)} Q^{1/(\alpha+\beta)} \\ K = \left(\dfrac{r_K}{r_L} \times \dfrac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)} Q^{1/(\alpha+\beta)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$TC = \left(r_L \left(\frac{r_L}{r_K} \times \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\beta/(\alpha+\beta)} + r_K \left(\frac{r_K}{r_L} \times \frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha/(\alpha+\beta)} \right) \times Q^{1/(\alpha+\beta)}.$$

6.2. Следующий пример относится к нахождению функции предложения при заданной технологии (производственной функции) и в условиях ограничения на общие затраты. Первый шаг в решении данной задачи состоит в нахождении аналитического выражения для функции общих затрат и совпадает с задачей, рассматриваемой в предыдущем пункте. После нахождения функции общих затрат выписывается выражение для прибыли и условия максимизации прибыли при заданных бюджетных ограничениях. Представим решение, если производственная функция задается формулой $Q = L^{1/3}K^{1/3}$, а цены на труд и капитал соответственно равны $r_L = 1$, $r_K = 4$.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо найти оптимальное для данной технологии (т.е. для данной производственной функции) соотношение между трудом и капиталом, обеспечивающее минимум общих затрат при любом объеме выпуска. Из выражения для производственной функции получим зависимость между используемым капиталом K и объемом труда L при фиксированном выпуске продукции Q:
$Q = L^{1/3}K^{1/3} \Rightarrow K = \dfrac{Q^3}{L}$. Подставим эту зависимость в выражение для общих затрат $TC = r_L L + r_K K = L + \dfrac{4Q^3}{L}$ и найдем значение количества используемого труда L, при котором эти затраты достигают минимума:

$$\min_L (TC(L) = L + \frac{4Q^3}{L}) \Rightarrow \frac{dTC(L)}{dL} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4Q^3}{L^2} = 0 \Rightarrow L = 2\sqrt{Q^3}.$$

Сейчас можно уже записать выражение для функции общих затрат $TC(Q) = 2\sqrt{Q^3} + \dfrac{4Q^3}{2\sqrt{Q^3}} = 4\sqrt{Q^3}$, а также для прибыли и оптимальной цены, обеспечивающей максимум этой прибыли в виде функции объема производства: $P = M(TC(Q)) = \dfrac{dTC(Q)}{dQ} = \dfrac{d(4\sqrt{Q^3})}{dQ} = 6\sqrt{Q}$. Если обратить полученное выражение, т.е. разрешить его относительно Q, то результат и будет определять искомую функцию предложения по цене: $P = 6\sqrt{Q} \Rightarrow Q = \dfrac{P^2}{36}$.

Задания по теме 6

6.1. Найти оптимальное решение (комбинацию благ, доставляющих максимальное значение функции полезности) и построить графическую модель организации хозяйства Робинзона, если его функция полезности задается выражением $U = Q_1 \times Q_2$, производственные функции имеют вид: $\begin{cases} Q_1(L_1) = 0{,}3 \times p_2\sqrt{L_1} \\ Q_2(L_2) = 0{,}4p_1 \times L_2 + 0{,}1 \times p_3\sqrt{L_2} \end{cases}$, свободное время равно 10 ч (в сутки), а суточный бюджет рабочего времени определяется следующим соотношением: $L_1 + L_2 = 14$. В графической модели должны быть представлены следующие элементы: суточный бюджет рабочего времени, обе производственные функции, линия производственных возможностей, линия безразличия функции полезности, которая касается линии производственных возможностей в оптимальной точке.

6.2. Найти аналитическое выражение для функции общих затрат $TC = C(Q)$, если линия равных затрат задается формулой $p_2L + p_1K = 144$, а производственная функция – формулой $Q(L,K) = L^{0,75}K^{0,5}$.

6.3. Пусть производственная функция задается формулой $Q = L^{1/3}K^{1/3}$. Найдите функцию общих затрат, а затем, из условия максимизации прибыли – функцию предложения по цене, если $r_L = p_3$, $r_K = p_1$.

Тема 7. Модели потребительского спроса

Примеры решения типовых задач

7.1. Требуется найти функции спроса $Q_1^D(P_1,P_2)$ и $Q_2^D(P_1,P_2)$ для индивида, если его функция полезности имеет вид: $U = Q_1^{0,3}Q_2^{0,7}$, а бюджет ограничен M денежными единицами.

Для решения задачи запишем функцию Лагранжа, приравняем к нулю ее производные по Q_1 и Q_2 и выразим Q_2 через Q_1:

$L = Q_1^{0,3}Q_2^{0,7} + \lambda(M - P_1Q_1 - P_2Q_2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = 0,3\dfrac{Q_2^{0,7}}{Q_1^{0,7}} - \lambda P_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = 0,7\dfrac{Q_1^{0,3}}{Q_2^{0,3}} - \lambda P_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 0,3\dfrac{Q_2^{0,7}}{Q_1^{0,7}} = \lambda P_1 \\ 0,7\dfrac{Q_1^{0,3}}{Q_2^{0,3}} = \lambda P_2 \end{matrix} \Rightarrow Q_2 = \frac{0,7}{0,3} \times \frac{P_1}{P_2} \times Q_1.$$

Подставим полученное выражение в бюджетное ограничение и выразим Q_1 через M, P_1 и P_2:

$$P_1Q_1 + P_2\frac{0,7}{0,3} \cdot \frac{P_1}{P_2} \cdot Q_1 = \frac{10}{3}P_1Q_1 = M \Rightarrow Q_1(P_1,P_2) = \frac{0,3M}{P_1}.$$

Аналогично $Q_2(P_1,P_2) = \dfrac{0,7M}{P_2}$.

Таким образом, если функция полезности представлена функцией Кобба-Дугласа, то объем спроса на то или иное благо зависит только от его цены и величины бюджета; цены других благ не влияют на объем спроса данного блага, так как на каждый вид благ в данном случае потребитель выделяет фиксированную долю бюджета, равную показателю степени, с которой это благо входит в функцию полезности.

7.2. Существуют и другие функции полезности, при которых изменения цен на различные блага влияют друг на друга. Так, для функции полезности $U = \dfrac{Q_1 + a_1}{Q_2 + a_2}$ объем спроса на благо i выражается функцией

$Q_i{}^D = \dfrac{M - a_i P_i + a_j P_j}{2P_i}$, (здесь $j \neq i$) которая возрастает при снижении цены блага i, увеличении цены другого блага j и при увеличении бюджета M. Функции полезности такого типа соответствуют взаимозаменяемым благам: например, повышение цены на говядину увеличивает спрос на свинину, и наоборот. Взаимодополняемым благам соответствует другой тип функции полезности.

Важное значение в экономическом анализе имеют коэффициенты прямой эластичности спроса по цене E_iQ_i, показывающие, на сколько процентов изменится объем спроса на благо при изменении его цены на 1%, а также коэффициенты перекрестной эластичности спроса E_jQ_i, показывающие, на сколько процентов изменится объем спроса на благо при изменении цены другого блага на 1%.

Задания по теме 7

7.1. Найти функции спроса $Q_1{}^D(P_1,P_2)$ и $Q_2{}^D(P_1,P_2)$ для индивида, если его функция полезности имеет вид: $U = Q_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2}} Q_2^{\frac{p_2}{p_1+p_2}}$, а бюджет ограничен M денежными единицами.

7.2. Для функции полезности $U = \dfrac{Q_1 + p_1}{Q_2 + p_2}$ получить аналитические выражения для функции спроса на благо $Q_1{}^D$, рассчитать коэффициент прямой эластичности спроса по цене E_1Q_1 и коэффициенты перекрестной эластичности спроса по цене E_2Q_1. Считать, что бюджет ограничен M денежными единицами.

Тема 8. Модели взаимодействия спроса и предложения

Примеры решения типовых задач

8.1. Нахождение равновесной цены и равновесного объема спроса/предложения заключается в составлении уравнения рыночного равновесия посредством приравнивания заданных функций спроса и предложения, решении этого уравнения для получения равновесной цены и подстановки этой цены в заданную функцию спроса/предложения для определения соответствующей равновесной величины. Приведем пример нахождения равновесных значений для следующих функций:

- функция спроса $Q^D = 10 - 7P$;
- функция предложения $Q^S = 3 + 2P$.

Решим уравнение равновесия, приравняв правые части функций спроса и предложения:

$$10 - 7P = 3 + 2P \Rightarrow P = \frac{13}{9} \cong 1{,}44 .$$

Найдем равновесный объем спроса/предложения:

$Q^S = 3 + 2 \times 1{,}44 = 5{,}88 = Q^Q$.

8.2. Следующий пример посвящен задаче восстановления кривых спроса и предложения по значениям равновесных цен и количества некоторого блага, дополненных информацией о сложившихся уровнях эластичности спроса и потребления на это благо. Результаты решения данного примера могут использоваться в практике для расчета новых состояний равновесия при небольших изменениях рыночной обстановки. Приведем ниже формулировку соответствующей задачи:

на центральном рынке по цене 10 руб. за штуку в день продается 40 000 гвоздик. При этом $E_P{}^D = -3$, а $E_P{}^S = 4$.

Как изменится цена гвоздики, если спрос на нее сократится на 10%?

Каков будет объем продаж, если при исходном спросе продавцы по любой цене будут предлагать на 6000 гвоздик больше.

Для решения задачи вначале найдем аналитический вид функций спроса и предложения:

$$b = -E^D \frac{Q^*}{P^*} = 3\frac{40\ 000}{10} = 12\ 000 \Rightarrow a = Q^*(1 - E^D) = 40\ 000(1+3) = 160\ 000$$

$$\Rightarrow Q^D = a - bP = 160\ 000 - 12\ 000 \times P;$$

$$n = -E^S \frac{Q^*}{P^*} = 4\frac{40\ 000}{10} = 16\ 000 \Rightarrow m = Q^*(1 - E^S) = 40\ 000(1-4) = -120\ 000$$

$$\Rightarrow Q^S = m + nP = -120\ 000 + 16\ 000 \times P.$$

После этого ответим на поставленные вопросы:

1. Если спрос сократится на 10%, то цена, балансирующая спрос и предложение, определится из равенства

$$0{,}9(160\ 000 - 12\ 000 \times P) = -120\ 000 + 16\ 000P \Rightarrow P = \frac{264\ 000}{26\ 800} \cong 9{,}85.$$

2. Если бы продавцы в условиях первоначального спроса по каждой цене предлагали на 6000 гвоздик больше, то

$$160\ 000 - 12\ 000 \times P = 6\ 000 - 120\ 000 + 16\ 000P \Rightarrow P = \frac{274\ 000}{28\ 000} \cong 9{,}78;\ Q = 42\ 480.$$

8.3. Следующий пример иллюстрирует условия и процесс установления равновесной цены в паутинообразной модели ценообразования, описанной в плане-конспекте лекций. Предположим, что на основе взаимодействия спроса и предложения, представленных, соответственно, функциями $Q^D = 15 + 7P$ и $Q^S = -3 + 2P_{t-1}$, установилось долгосрочное равновесие $Q_0^* = 1, P_0^* = 2$ (равновесные значения цены и объема предложения находятся из решения уравнения $15 - 7P_0^* = -3 + 2P_0^* \Rightarrow P_0^* = 2 \Rightarrow Q_0^* = 15 - 7P_0^* = 1$). Вследствие повышения доходов изменилась психологическая ориентация покупателей и функция спроса на данном рынке приобрела вид:

$Q^D = 15 - (7 + \delta)\times P$, где δ – некоторый неизвестный параметр. Исследовать, при каких значениях δ:

а) на рынке установится долгосрочное равновесие;

б) возникнут незатухающие колебания цены вокруг ее равновесного значения;

в) равновесие будет неустойчивым.

<u>Решение</u>. Для ответа на все три вопроса мы должны выяснить свойства параметра β в рассматриваемой паутинообразной модели (обозначения см. в плане-конспекте лекций). Известно, что $\beta = -\frac{n}{b} = -\frac{2}{7+\delta}$ и ключевым для ответа на поставленный вопрос станет исследование решения уравнения $|\beta| = 1 \Rightarrow \left|\frac{2}{7+\delta}\right| = 1 \Rightarrow 7 + \delta = \pm 2 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \delta_1 = -7 - 2 = -9 \\ \delta_2 = -7 + 2 = -5 \end{Bmatrix}$. Полученные значения δ определяют условия, при которых $|\beta| = 1$ и будут наблюдаться незатухающие колебания рынка вокруг положения равновесия. Ясно, что при $-9 < \delta < -5$ рынок будет неустойчивым, так как выполняется неравенство $|\beta| > 1$, а при $\delta < -9$ или $\delta > -5$ – он будет устойчивым, так как выполняется обратное неравенство $|\beta| < 1$. Однако пока это только математическое решение задачи. Для получения экономически осмысленного решения необходимо ограничить пределы изменения δ неотрицательностью коэффициента $b = 7 + \delta$. Это также не представляет труда: $7 + \delta \geq 0 \iff \delta \geq -7$. Комбинируя данное неравенство с предыдущими, получим окончательный ответ:

а) долгосрочное равновесие установится на рынке при $\delta > -5$;

б) незатухающие колебания цены вокруг ее равновесного значения возникнут при $\delta = -5$;

в) рынок будет неустойчивым при $-7 \leq \delta < -5$.

Задания по теме 8

8.1. Определить, как будет изменяться равновесная цена в течение пяти лет, если функции спроса и предложения в начальный момент времени будут определяться формулами:

$Q^D = 20 - p_1 P$ и $Q^S = 5 + p_2 P$.

Рассмотреть следующие варианты:

а) коэффициент p_1 – увеличивается на 1 каждый год, и коэффициент p_2 – увеличивается на 1 каждый год;

б) коэффициент p_1 – увеличивается на 1 каждый год, а коэффициент p_2 – уменьшается на 1 каждый год;

в) коэффициент p_1 – уменьшается на 1 каждый год, а коэффициент p_2 – увеличивается на 1 каждый год (если какой-то из параметров при уменьшении становится равным нулю, то его последующие значения также принимаются равными нулю).

Изобразить на одном графике изменения равновесной цены во времени для всех трех вариантов.

8.2. На центральном рынке по цене 13 руб. за штуку в день продается 60 000 гвоздик. При этом $E_P{}^D = -p_2$, а $E_P{}^S = -p_3$.

Как изменится цена гвоздики, если спрос на нее сократится на 20%?

Каков будет объем продаж, если при исходном спросе продавцы по любой цене будут предлагать на 5000 гвоздик больше.

Указания.

1. Восстановить формулы для функций спроса и предложения по цене.
2. Найти равновесное состояние, если новый спрос (новая функция спроса) будет равен 0,8 от старого.
3. Найти равновесное состояние, если новое предложение (новая функция предложения) будет на 5000 меньше старого.

На основе взаимодействия спроса и предложения, представленных, соответственно, функциями $Q^D = 5p_3 - p_2P$ и $Q^S = -3 + p_1P_{t-1}$, установилось долгосрочное равновесие (равновесные значения цены и предложения находятся из решения уравнения $5p_3 - p_2P_0^* = -3 + p_1P_0^*$. Вследствие повышения доходов изменилась психологическая ориентация покупателей и функция спроса на данном рынке приобрела вид $Q^D = 5p_3 - (p_2 + \delta)\times P$, где δ – некоторый неизвестный параметр. Найти равновесные цену и предложение для начального момента времени и исследовать, при каких значениях δ:

а) на рынке установится долгосрочное равновесие;

б) возникнут незатухающие колебания цены вокруг ее равновесного значения;

в) равновесие будет неустойчивым. Построить по одному графику изменения цены во времени для каждой из перечисленных ситуаций.

Тема 9. Модели ценообразования на рынках благ

Примеры решения типовых задач

9.1. В следующем примере рассматривается ситуация установления цены в результате взаимодействия спроса и предложения на совершенно конкурентном рынке. Из теоретической части следует, что минимум средних затрат в условиях совершенной конкуренции определяет, до каких пределов увеличиваются размеры фирм в ходе расширения масштабов производства, поэтому, если этот минимум существует (кривая средних затрат как функция валового выпуска имеет минимум), то при заданном отраслевом спросе число фирм, функционирующих в отрасли, однозначно определено.

Для иллюстрации рассмотрим следующую микроэкономическую модель. Дана функция отраслевого спроса $Q^D = 130 - 4P$ и функция общих затрат у фирм, оставшихся в отрасли, $TC = 5 + 0{,}2Q^2$. Найти количество фирм, функционирующих в отрасли.

Вначале определим, при каком объеме выпуска фирма достигает минимальных затрат на единицу продукции. Для этого вычислим функцию средних затрат $ATC = \frac{5}{Q} + 0{,}2Q$ и найдем минимум этой функции из условия равенства нулю ее первой производной:

$$\frac{dATC}{dQ} = -\frac{5}{Q^2} + 0{,}2 = 0 \Rightarrow Q^2 = \frac{5}{0{,}2} = 25 \Rightarrow Q = 5.$$

Для того чтобы отдельная фирма предлагала 5 ед. продукции, необходимо, чтобы цена равнялась предельным затратам на выпуск 5 ед. продукции. Поскольку $MTC = \frac{dTC}{dQ} = 0{,}4Q$, то при выпуске 5 ед. продукции $MTC = 2$. Следовательно, при $P = 2$ (так как $P = MTC$) каждая из оставшихся в отрасли фирм будет ограничиваться выпуском 5 ед. продукции. Так как при $P = 2$ отраслевой спрос составит $Q^D = 130 - 4P = 130 - 8 = 122$, то в отрасли будет функционировать 24–25 фирм (122/5 = 24,4).

9.2. Рассмотрим задачу ценообразования на монополизированном рынке, для чего рассмотрим ситуацию взаимодействия двух монополистов и сравним ее с ситуацией совершенной конкуренции, возникающей, например, при объединении этих монополистов в одну фирму (задача оценки ущерба от монополизации производства). Допустим, что монополия А вынуждена приобретать сырье для своего производства у другой монополии Б по цене r (эту цену монополия А выбирает после изучения особенностей рынка и руководствуясь принципом оптимальности). В целях упрощения предположим, что затраты монополии А состоят только из затрат на покупку сырья, а технология ее производства соответствует производственной функции $Q_A = \frac{F}{2} \Rightarrow F = 2Q_A$, где F – объем используемого сырья. Спрос на продукцию монополии соответствует функции $P = 100 - 4Q_A$. У монополии Б общие затраты на производство характеризуются функцией $TC_B = nF$ (коэффициент монополия Б также выбирает после изучения особенностей рынка руководствуясь принципом оптимальности). Сколько в этих условиях будет произведено продукции?

У монополии А общая выручка $TR_A = P(Q_A) \times Q_A = 100Q_A - 4Q_A^2$ и соответствующая ей предельная выручка $MR_A = 100 - 8Q_A$; общие затраты $TC_A = rF = 2rQ_A$. Тогда предельные затраты $MTC_A = \frac{dTC}{dQ_A} = 2r$.

В данных условиях свой объем выпуска монополия определит из условия равенства предельных затрат предельной выручке:

$$MR_A = MTC_A \Rightarrow 100 - 8Q_A = 2r \Rightarrow Q_A = \frac{100 - 2r}{8}.$$

Поскольку технология (производственная функция) монополии А известна и равна $Q_A = \frac{F}{2}$, объем ее спроса на сырье составит $F = 2Q_A = 2\frac{100-2r}{8} = \frac{50-r}{2}$. Отсюда можно найти функцию цены спроса на сырье $r = 50 - 2F$, и выручка фирмы Б будет определяться по формуле $TR_Б = rF = 50F - 2F^2$. Предельная выручка в этом случае будет равна $MR_Б = \frac{dTR_Б}{dF} = 50 - 4F$.

Монополия Б максимизирует прибыль при равенстве своей предельной выручки предельным затратам монополии Б: $MR_Б = MTC_Б$, что приводит к соотношению $n = 50 - 4F$. Последнее соотношение соответствует производству $n = 50 - 4F \Rightarrow F = \frac{50-n}{4}$ ед. сырья. Из такого количества сырья монополия А по своей технологии произведет $Q_A = \frac{F}{2} = \frac{50-n}{4 \times 2} = \frac{50-n}{8}$ ед. продукции.

Определим теперь, каков был бы объем данной продукции, если бы монополии объединились. Предельная выручка в этом случае остается прежней $MR_A = 100 - 8Q_A$, а затраты на производство составят $TC = nF = 2nQ_A$. Соответствующие предельные затраты равны $MTC_A = \frac{dTC}{dQ_A} = 2n$. Прибыль, как и в предыдущем случае, достигает максимума при равенстве предельных затрат предельной выручке, т.е. в случае $100 - 8Q_A = 2n$ при производстве $Q_A = \frac{100-2n}{8} = \frac{50-n}{4}$. Таким образом, из-за монополизации по вертикали выпуск продукции сокращается в два раза.

9.3. Следующий пример иллюстрирует ситуацию, когда фирма при заданной технологии и производственных возможностях (заданной производственной функции) определяет цены и объемы выпуска блага исходя из своих внутренних целей. Пусть заданы функция отраслевого спроса на благо $Q^D = 200 - P$, функция общих затрат производства $TC = 50 + Q + Q^2$ и производственная функция при фиксированном объеме используемого труда $Q = 2K$. Определить цены и объемы выпуска блага, обеспечивающие максимизацию:

а) выручки;

б) прибыли;

в) нормы прибыли.

Решение.

а) Общая выручка $TR = PQ = 200Q - Q^2$ достигает максимума, если $MR = 200 - 2Q = 0 \Rightarrow Q^* = 100$, $P^* = 100$.

б) Условие максимизации прибыли – это равенство предельной выручки предельным затратам: $MR = MTC$ => 200 – $2Q$ = 1 + $2Q$ => => $Q^* = 49{,}75$, $P^* = 150{,}25$.

в) объем прибыли определяется по формуле:

$$\pi(Q) = PQ - TC = 200Q - Q^2 - 50 - Q - Q^2 = 199Q - 2Q^2 - 50 .$$

Тогда $\dfrac{\pi(Q)}{K(Q)} = \dfrac{199Q - 2Q^2 - 50}{0{,}5Q}$. В данной ситуации мы можем упростить функцию $\dfrac{\pi(Q)}{K(Q)}$ и стандартными средствами найти ее максимум, а можем воспользоваться более простой формулой, приведенной в плане-конспекте лекций. Пойдем по второму пути. Из представленных в условии выражений для соответствующих экономических функций найдем $\dfrac{d\pi}{dQ} = 199 - 4Q$ и $\dfrac{dK}{dQ} = 0{,}5$. Отсюда $\dfrac{d\pi}{dK} = \dfrac{199 - 4Q}{0{,}5}$. Следовательно, норма прибыли будет максимальной при выполнении равенства $\dfrac{d\pi}{dK} = \dfrac{\pi}{K}$, т.е. при условии $\dfrac{199Q - 2Q^2 - 50}{0{,}5Q} = \dfrac{199 - 4Q}{0{,}5} \Rightarrow Q^* = 5, P^* = 195$.

9.4. В следующем примере рассматривается ситуация, когда фирме не выгодно продавать всю произведенную продукцию по одной цене и она осуществляет так называемую «ценовую дискриминацию второй степени». Отраслевой спрос, представленный функцией P = 100 – $3Q$, удовлетворяется монополией, общие затраты которой характеризуются функцией TC = 4 + $2Q$. Каков максимально возможный объем прибыли монополии:

а) при продаже всей продукции по единой цене;

б) разделении всего объема выпуска на партии, первая из которых включает 8 ед. продукции.

Решение.

а) Условие максимизации прибыли при отсутствии ценовой дискриминации:

$$MR = MC \Rightarrow 100 - 6Q = 2 \Rightarrow Q = \frac{98}{6} \cong 16{,}3.$$

Поскольку партия должна содержать целое число единиц продукции, оптимальный объем партии может составлять 16 либо 17 ед. Найдем оптимальные цены и рассчитаем прибыль для этих двух вариантов:

Оптимальные цены $P = 100 - 3Q \Rightarrow \begin{cases} P(16) = 100 - 3\times16 = 52 \\ P(17) = 100 - 3\times17 = 49 \end{cases}.$

Прибыль $\pi(Q) = PQ - TC(Q) \Rightarrow \begin{cases} \pi(16) = 52\times16-(4+2\times16) = 796. \\ \pi(17) = 49\times17-(4+2\times17) = 795 \end{cases}$

б) При осуществлении ценовой дискриминации первые 8 ед. продукции можно продать по цене $P = 100 - 3\times8 = 76$. В заданных условиях обозначим $q_1 = 8$ – объем первой партии и вычислим:

$$MR_1 = (PQ)' = ((100-3Q)Q)' = (100-6Q)\big|_{Q=q_1=8} = 100-6\times8 = 52.$$

Значит, вторую партию нужно продавать по цене 52 (это следует из условия $MR_1 = P_2$. Используя функцию отраслевого спроса, определим размер второй партии q_2: $52 = 100 - 3\times(8 + q_2) \Rightarrow q_2 = 8$.

Поскольку общая выручка от второй партии определяется по формуле $TR_2 = q_2(100 - 3(8 + q_2)) = 76q_2 - 3q_2^2$, ее предельное значение будет равно выражению $MR_2 = \frac{dTR_2}{dq_2} = 76-6q_2$. При $q_2 = 8$ величина $MR_2 = 76 - 6\times8 = 28$, следовательно, $P_3 = 28$.

Снова, используя функцию отраслевого спроса, определим размер третьей партии q_3: $28 = 100 - 3\times(8 + 8 + q_3) \Rightarrow q_3 = 8$.

Найдем общую выручку от третьей партии $TR_3 = q_3(100 - 3\times(8 + 8 + q_3)) = 52q_3 - 3q_3^2$ и ее предельное значение $MR_3 = \frac{dTR_3}{dq_3} = 52-6q_2$. При $q_3 = 8$ величина $MR_3 = 52 - 6\times8 = 4$, следовательно, $P_4 = 4$.

Еще раз, используя функцию отраслевого спроса, определим размер четвертой партии q_4: $4 = 100 - 3\times(8 + 8 +8 + q_4) \Rightarrow q_4 = 8$.

Заметим, что общий отраслевой спрос по цене $P = 4$ определяется из условия задачи по формуле $P = 100-3Q$, равен $4 = 100-3Q \Rightarrow Q = 32$ и полностью удовлетворяется посредством реализации четырех партий товара – $q_1+q_2+q_3+q_4 = 32$. Общая прибыль монополии при осуществлении ценовой дискриминации равна $76\times8+52\times8+28\times8+4\times8-4-2\times32 = 1212$ денежных единиц и превосходит прибыль, которую имела фирма при отсутствии ценовой дискриминации.

Задания по теме 9

9.1. Дана функция отраслевого спроса $Q^D = 130 - p_1P$ и функция общих затрат у фирм, оставшихся в отрасли $TC = p_3 + 0{,}2\times p_2\times Q^2$. Найти количество фирм, функционирующих в отрасли в условиях совершенной конкуренции (считать продукт бесконечно делимым).

9.2. Решить задачу оценки ущерба от монополизации производства для случая, когда монополия А вынуждена приобретать сырье для своего производства у другой монополии Б по цене r (эту цену монополия А выбирает после изучения особенностей рынка и руководствуясь принципом оптимальности). Предположим, что затраты монополии А состоят только из затрат на покупку сырья, а технология ее производства соответствует производственной функции $Q_A = \frac{F}{p_1} \Rightarrow F = p_1 Q_A$, где F – объем используемого сырья. Спрос на продукцию монополии соответствует функции $P = 100 - p_2 Q_A$. У монополии Б общие затраты на производство характеризуются функцией $TC_B = nF$ (коэффициент монополия Б также выбирает после изучения особенностей рынка руководствуясь принципом оптимальности). Сколько в этих условиях было бы произведено продукции и каков был бы объем данной продукции, в условиях объединения монополии?

9.3. При заданных функции отраслевого спроса на благо $Q^D = 200 - p_1 P$, функции общих затрат производства $TC = 5p_2 + p_3 Q + Q_2$ и производственной функции $Q = 2p_3 K$ определить цены и объемы выпуска блага, обеспечивающие максимизацию:

а) выручки;

б) прибыли;

в) нормы прибыли.

9.4. Отраслевой спрос, представленный функцией $P = 100 - p_1 \times Q$, удовлетворяется монополией, общие затраты которой характеризуются функцией $TC = p_2 + p_3 \times Q$. Каков максимально возможный объем прибыли монополии:

а) при продаже всей продукции по единой цене;

б) разделении всего объема выпуска на партии, первая из которых включает 8 ед. продукции (партия всегда содержит целое число единиц продукции).

Тема 10. Модели ценообразования на рынке факторов производства

Примеры решения типовых задач

10.1. В данном примере рассматривается задача определения предложения индивидом количества труда $L = 24 - F$ в зависимости от ставки дневной заработной платы на рынке факторов производства, если его функция полезности равна $U(F,M) = F^{0,3}M^{0,7}$, ставка дневной заработной платы r_L, а прямая заработной платы определяется формулой $M = (24 - F) \times r_L$.

Решение. Перепишем уравнение прямой заработной платы в более привычном виде и выпишем функцию Лагранжа для решения соответствующей задачи оптимизации:

$M + F \times r_L = 24 \times r_L$ – прямая заработной платы;

$L(M,F) = F^{0,3}M^{0,7} + \lambda(24 \times r_L - M - F \times r_L)$ – функция Лагранжа.

Найдем частные производные функции Лагранжа по переменным (F) и (M):

$$\begin{cases} \partial L(M,F)\big/\partial M = 0{,}7\dfrac{F^{0,3}M^{0,7}}{M} - \lambda \\ \partial L(M,F)\big/\partial F = 0{,}3\dfrac{F^{0,3}M^{0,7}}{F} + \lambda \cdot r_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}7\dfrac{F^{0,3}M^{0,7}}{M} = \lambda \\ 0{,}3\dfrac{F^{0,3}M^{0,7}}{F} = \lambda \cdot r_L \end{cases}.$$

Разделим теперь первое уравнение на второе, выразим (M) через (F) и подставим в уравнение для прямой заработной платы:

$$\frac{0{,}7}{0{,}3}\frac{F}{M} = \frac{1}{r_L} \Rightarrow M = \frac{7}{3}r_L F \Rightarrow \frac{7}{3}r_L F + r_L F = 24 r_L \Rightarrow F = \frac{24}{10/3} = 7{,}2\,.$$

Мы видим, что если функция полезности индивида является функцией Кобба-Дугласа, то количество предлагаемого труда $L = 24 - F = 24 - 7{,}2 = 16{,}8$ не зависит от ставки заработной платы. Однако для других функций полезности это свойство блага L может не выполняться, в чем вам придется убедиться на соответствующем примере, рекомендованном для самостоятельного выполнения.

Задания по теме 10

10.1. Рассмотрим задачу определения предложения индивидом количества труда $L = 24 - F$ в зависимости от ставки дневной заработной платы на рынке факторов производства, если его функция полезности равна $U(F,M) = \dfrac{M - p_1}{\sqrt{r_L - F}}$, ставка дневной заработной платы r_L, а прямая заработной платы определяется формулой $M = (24 - F)\times r_L$. Построить график количества предлагаемого труда в зависимости от ставки заработной платы.

Тема 11. Модели общего экономического равновесия на рынках благ и факторов производства

Примеры решения типовых задач

11.1. В данном примере рассматривается задача нахождения общего экономического равновесия как результата взаимодействия рынков благ и факторов производства. Рассматривается экономическая система, которая состоит из двух потребителей и двух фирм, каждая из которых производит по одному виду продукции. Предпочтения потребителей представлены их функциями полезности:

$$U_i(\{Q_{i,j}\})_{\,i=1,2} = \begin{cases} U_1 = Q_{1,1}^2 \times Q_{1,2} \\ U_2 = Q_{2,1} \times Q_{2,2}^2 \end{cases},$$

где $Q_{i,j}$– количество j-го блага, потребляемого i-м индивидом. Доходы (бюджеты) потребителей формируются, во-первых, за счет продажи труда (рассматривается только один фактор производства – количество труда) и, во-вторых, за счет прибыли от деятельности фирм, собственниками капитала которых они являются. Каждый индивид (потребитель) желает продать по 6 ед. труда по одной и той же цене r, так что $L_1^S + L_2^S = 12$. Акции каждой фирмы распределены между предприятиями поровну, и вся прибыль распределяется на дивиденды.

Фирмы имеют фиксированный объем не изнашивающегося капитала и применяют технологии, характеризующиеся следующими производственными функциями: $\begin{cases} Q_1 = 2\sqrt{L_1} \\ Q_2 = 12\sqrt{L_2} \end{cases}$.

Рассчитать для данной экономической системы модель общего экономического равновесия и вычислить суммарную ценность произведенной продукции.

<u>Решение</u>.

Из условия максимизации ожидаемой прибыли находим функции спроса на труд для каждой из фирм в зависимости от цен на эти блага (P_1, P_2) и цены на трудовые ресурсы (r)…

$$\begin{cases} \max \pi_1 = P_1 Q_1 - rL_1 \\ \max \pi_2 = P_2 Q_2 - rL_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max \pi_1 = pP_1\sqrt{L_1} - rL_1 \\ \max \pi_2 = qP_2\sqrt{L_2} - rL_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^{d\pi_1}\!/_{dL_1} = 0 \\ {}^{d\pi_2}\!/_{dL_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {pP_1}/{2\sqrt{L_1}} = r \\ {qP_2}/{2\sqrt{L_2}} = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = (\frac{pP_1}{2r})^2 \\ L_2 = (\frac{pP_2}{2r})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1^D = (\frac{p^2}{4})(\frac{P_1}{r})^2 \\ L_2^D = (\frac{p^2}{4})(\frac{P_2}{r})^2 \end{cases}.$$

Подставляем полученные выражения для функций спроса на труд в приведенные в условии задачи выражения для производственных функций каждой из фирм, чтобы получить функции предложения первого и второго благ в зависимости от цен на эти блага (P_1, P_2) и цены на трудовые ресурсы (r):

$$\begin{cases} Q_1 = 2\sqrt{L_1^D} \\ Q_2 = 12\sqrt{L_2^D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1^S = 2\frac{P_1}{r} \\ Q_2^S = 72\frac{P_2}{r} \end{cases}.$$

Подставляем полученные в пп. 1–2 функции спроса на труд и функции предложения благ в выражения для прибыли каждой и суммируем эти выражения для получения формулы общей прибыли рассматриваемой экономической системы.

$$\begin{cases} \pi_1 = P_1 Q_1^S - rL_1^D \\ \pi_2 = P_2 Q_2^S - rL_2^D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{P_1^2}{r} \\ \pi_2 = 9\frac{P_2^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \pi_\Sigma = \pi_1 + \pi_2 = \frac{P_1^2}{r} + 9\frac{P_2^2}{r}.$$

Сформируем бюджетные ограничения для каждого из потребителей (они же в данной экономической системе являются и производителями), обратившись к условию задачи. При формировании таких ограничений будем учитывать, что каждый из потребителей предлагает на рынок труда по 6 ед. труда и то, что прибыль от использования этого труда при производстве делится поровну (см. условия задачи):

$$\begin{cases} R_1 = 6r + \dfrac{\pi_\Sigma}{2} \\ R_2 = 6r + \dfrac{\pi_\Sigma}{2} \end{cases}.$$

Найдем функции потребительского спроса для каждого из потребителей из условия максимума соответствующих этим потребителям функций полезности и определенных в предыдущем разделе бюджетных ограничений:

$$\begin{cases} \max U_1 = Q_{1,1}^2 \cdot Q_{1,2} \text{ при } P_1 Q_{1,1} + P_2 Q_{1,2} = R_1 \\ \max U_2 = Q_{2,1} \cdot Q_{2,2}^2 \text{ при } P_1 Q_{2,1} + P_2 Q_{2,2} = R_2 \end{cases}.$$

Составим функции Лагранжа, выпишем необходимые условия максимума функций полезности и упростим полученную систему стандартным способом (разделив правые и левые части соответствующих уравнений друг на друга):

$$\left. \begin{aligned} L_1(Q_{1,1}, Q_{1,2}, \lambda) = Q_{1,1}^2 \times Q_{1,2} + \lambda(R_1 - P_1 Q_{1,1} - P_2 Q_{1,2}) \\ L_2(Q_{2,1}, Q_{2,2}, \lambda) = Q_{2,1} \times Q_{2,2}^2 + \lambda(R_2 - P_1 Q_{2,1} - P_2 Q_{2,2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \partial L_1 / \partial Q_{1,1} = 2Q_{1,1} Q_{1,2} - \lambda P_1 = 0 \\ \partial L_1 / \partial Q_{1,2} = Q_{1,1}^2 - \lambda P_2 = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{2Q_{1,2}}{Q_{1,1}} = \dfrac{P_1}{P_2} \Rightarrow Q_{1,1} = \dfrac{2P_2 Q_{1,2}}{P_1} \\ \begin{pmatrix} \partial L_2 / \partial Q_{2,1} = Q_{2,2}^2 - \lambda P_1 = 0 \\ \partial L_2 / \partial Q_{2,2} = 2Q_{2,1} \times Q_{2,2} - \lambda P_2 = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{Q_{2,2}}{2Q_{2,1}} = \dfrac{P_1}{P_2} \Rightarrow Q_{2,1} = \dfrac{P_2 Q_{2,2}}{2P_1} \end{cases}.$$

Подставим полученные выражения в балансовые ограничения и после некоторых несложных преобразований завершим нахождение функций потребительского спроса:

$$\begin{cases} Q_{1,1} = \dfrac{2P_2 Q_{1,2}}{P_1} \\ Q_{2,1} = \dfrac{P_2 Q_{2,2}}{2P_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} R_1 = P_1 \frac{2P_2 Q_{1,2}}{P_1} + P_2 Q_{1,2} = 3P_2 Q_{1,2} \Rightarrow \\ R_2 = P_1 \frac{P_2 Q_{2,2}}{2P_1} + P_2 Q_{2,2} = \frac{3}{2} P_2 Q_{2,2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Q_{1,2}^D = \dfrac{R_1}{3P_2} \\ Q_{1,1}^D = \dfrac{2P_2 Q_{1,2}}{P_1} = \dfrac{2R_1}{3P_1} \end{cases}; \quad \begin{cases} Q_{2,2}^D = \dfrac{2}{3} \dfrac{R_2}{P_2} \\ Q_{2,1}^D = \dfrac{P_2 Q_{2,2}}{2P_1} = \dfrac{1}{3} \dfrac{R_2}{P_1} \end{cases}.$$

Формализовав поведение экономических субъектов на всех рынках, можно построить модель общего экономического равновесия для рассматриваемой экономики (экономической системы). В соответствии с законом Вальраса достаточно определить равновесия лишь на двух из трех рынков. Выберем рынок труда и рынок первого блага.

Условие равновесия на рынке труда:

$$L_1^D + L_2^D = L_1^S + L_2^S = 12 \Rightarrow (\frac{P_1}{r})^2 + 9(\frac{P_2}{r})^2 = 12\,.$$

Условия равновесия на рынке первого блага:

$$Q_1^S = Q_{1,1}^D + Q_{2,1}^D \Rightarrow 2\frac{P_1}{r} = \frac{2R_1}{3P_1} + \frac{1}{3}\frac{R_2}{P_1} \Rightarrow 2\frac{P_1}{r} = \frac{12r + \pi_\Sigma}{2P_1} \Rightarrow$$

$$P_1^2 = \frac{(12r + \pi_\Sigma)r}{4} = \frac{(12r^2 + P_1^2 + 9P_2^2)}{4}.$$

Примем единицу труда в качестве масштаба цен (r = 1). Тогда условия равновесия приобретут следующий вид:

$$\begin{cases} P_1{}^2 + 9P_2{}^2 = 12 \\ 3P_1^2 = 12 + 9P_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1{}^2 = 12 - 9P_2{}^2 \\ 36 - 27P_2{}^2 = 12 + 9P_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = \sqrt{6} \\ P_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}.$$

Вычислим суммарную ценность произведенной продукции:

$$P_1Q_1^S + P_2Q_2^S = 2P_1^2 + 72P_2^2 = 12 + 24 \times 6 = 156.$$

Задания по теме 11

11.1. Рассмотрите экономическую систему, которая состоит из двух потребителей и двух фирм, каждая из которых производит по одному виду продукции. Предпочтения потребителей представлены их функциями полезности:

$$U_i(\{Q_{i,j}\})_{\,i=1,2} = \begin{cases} U_1 = Q_{1,1}^2 \times Q_{1,2} \\ U_2 = Q_{2,1} \times Q_{2,2}^2 \end{cases},$$

где $Q_{i,j}$– количество j-го блага, потребляемого i-м индивидом. Доходы (бюджеты) потребителей формируются, во-первых, за счет продажи труда (рассматривается только один фактор производства – количество труда) и, во-вторых, за счет прибыли от деятельности фирм, собственниками капитала которых они являются. Каждый индивид (потребитель) желает продать по равному числу единиц труда по одной и той же цене r, так что $L_1^S + L_2^S = 10p_2$ и $L_1^S = L_2^S = 5p_2$. Акции каждой фирмы распределены между предприятиями поровну и вся прибыль распределяется на дивиденды.

Фирмы имеют фиксированный объем неизнашивающегося капитала и применяют технологии, характеризующиеся следующими производственными функциями: $\begin{cases} Q_1 = p_1\sqrt{L_1} \\ Q_2 = p_3\sqrt{L_2} \end{cases}$. Требуется рассчитать для данной экономической системы модель общего экономического равновесия и вычислить суммарную ценность произведенной продукции.

Раздел 3. Основы теории производственных функций

Тема 12. Понятие производственной функции одной и многих переменных

Примеры решения типовых задач

12.1. Рассмотрим пример определения параметра p, который характеризует значимость научно-технического прогресса для микроэкономической производственной функции следующего вида: $y = e^p x_1^{0,25} x_2^{0,75}$. В плане-конспекте лекций отмечалось, что микроэкономическая производственная функция выражает максимально возможный объем выпуска продукции в условиях ограниченного использования ресурсов: x_1 – количество основных фондов и x_2 – трудозатраты. В данной ситуации взаимодействие внутренних факторов в производственном процессе предполагается постоянным и прирост продукции может обеспечиваться только за счет фактора научно-технического прогресса. Задача состоит в определении значения параметра p, при котором в каждый момент времени будет обеспечиваться максимально возможное значение величины конечного продукта. Конечно, для определения оптимального значения параметра p нам необходимо задать в явном виде ограничение на использование ресурсов. Предположим, что это ограничение имеет вид: $5x_1 + 3x_2 + 12p \le 100$. Здесь числа 5, 3 и 12 могут интерпретироваться как (неизменные – см. выше) цены за единицу, соответственно, факторов x_1, x_2 и p, а правая часть ограничения – как заданные внешние условия, характеризующие экономические возможности данной производственной системы (на выпуск продукции выделяется 100 единиц суммарного ресурса, которые должны быть распределены между факторами x_1, x_2 и вложениями p в научно-производственную деятельность). Сформулируем соответствующую задачу максимизации (заметим, что представленное ограничение в данной задаче можно заменить на ограничение типа равенства $5x_1(t) + 3x_2(t) = 100 + 4t$):

$$e^p x_1^{0,25} x_2^{0,75} \Rightarrow \max\Big|_{5x_1 + 3x_2 + 12p = 100}.$$

Запишем функцию Лагранжа, соответствующую данной задаче, и составим систему уравнений:

$$L(x_1, x_2, p, \lambda) = e^p x_1^{0,25} x_2^{0,75} + \lambda(100 - 5x_1 - 3x_2 - 12p).$$

Обозначим $e^p x_1^{0,25} x_2^{0,75}$ через F и запишем необходимые условия максимума функции Лагранжа:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial L}{\partial p}=F-12\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_1}=0{,}25\dfrac{F}{x_1}-5\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=0{,}75\dfrac{F}{x_2}-3\lambda=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=100-5x_1-3x_2-12p=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\dfrac{F}{\lambda}=12\\ x_1=0{,}05\dfrac{F}{\lambda}=0{,}6\\ x_2=0{,}25\dfrac{F}{\lambda}=3\\ p=\dfrac{100-5x_1-3x_2}{12}=\dfrac{88}{12}\cong 7{,}3\end{array}\right\}.$$

Для того чтобы выяснить экономический смысл величины p в сравнении с факторами x_1 и x_2, рассчитаем эластичность рассматриваемой микроэкономической функции $y=e^{p}x_1^{0,25}x_2^{0,75}$ по каждому из перечисленных параметров. Поскольку в предыдущей теме настоящего учебного пособия рассматривалась эластичность экономических функций только для случая одного переменного, сделаем дополнительные пояснения. Для нахождения величины эластичности произвольной экономической функции многих переменных по любому из факторов используются формулы, сходные с приведенными в предыдущей теме, только вместо обыкновенной производной результирующей функции по выбранному аргументу рассматривается частная производная.

Проиллюстрируем вышесказанное на рассматриваемом примере:

$$\left.\begin{array}{r}E_{x_1}(y)=\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\times\dfrac{x_1}{y}=\dfrac{0{,}25y}{x_1}\times\dfrac{x_1}{y}=0{,}25\\ E_{x_2}(y)=\dfrac{\partial y}{\partial x_2}\times\dfrac{x_2}{y}=\dfrac{0{,}75y}{x_2}\times\dfrac{x_2}{y}=0{,}75\\ E_{p}(y)=\dfrac{\partial y}{\partial p}\times\dfrac{p}{y}=p=7{,}3\end{array}\right\}.$$

Полученный результат показывает, что ежегодный прирост вложений в научно-производственную деятельность на 1% приведет для рассматриваемой системы к росту выпуска выходного продукта на 7,3%, что почти в 10 раз превышает отдачу от фактора x_2 и почти в 30 раз больше, чем отдача от фактора x_1.

Задания по теме 12

12.1. Определить значение параметра p, который характеризует значимость научно-технического прогресса для микроэкономической производственной функции следующего вида: $y=e^{p}x_1^{\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}}x_2^{\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}}$ при ресурсных ограничениях: $p_1x_1+p_2x_2+p_3p\le 100$. Рассчитать коэффициенты эластичности производственной функции по отношению к факторам производства и научно-техническому прогрессу.

Тема 13. Основные свойства производственных функций и соответствующие экономические показатели

Примеры решения типовых задач

13.1. Рассмотрим еще один пример, связанный с расчетом производных экономических показателей: средних величин, маржинальных величин, эластичностей, показателей предельной нормы замены труда капиталом и капитала трудом.

Рассмотрим производственную функцию Кобба-Дугласа $Y = K^{0,3}L^{0,7}$ и рассчитаем последовательно все требуемые величины:

1. Средние величины $A_K Y = \left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}$, $A_L Y = \left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$;

2. Предельные (маржинальные) величины $M_K Y = 0{,}3 \times \left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}$, $M_L Y = 0{,}7 \times \left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$;

3. Эластичности $E_K Y = \frac{\partial Y}{\partial K} \times \frac{K}{Y} = 0{,}3;\ E_L Y = \frac{\partial Y}{\partial L} \times \frac{L}{Y} = 0{,}7$;

4. Предельные нормы замены $R_{K,L} Y = \frac{E_K Y}{E_L Y} \times \frac{L}{K} = \frac{0{,}3}{0{,}7} \times \frac{L}{K} = 0{,}43 \times \frac{L}{K}$, $R_{L,K} Y = \frac{1}{R_{K,L} Y} = 2{,}3 \times \frac{K}{L}$.

Задания по теме 13

13.1. Рассчитать производные экономические величины (среднее значение, маржинальное значение и эластичность) и построить эскизы соответствующих графиков (для каждого типа функции нарисовать на одном рисунке четыре графика: исходная функция (суммарная величина), среднее значение, маржинальное значение и эластичность) для следующих экономических функций:

1. Линейная функция: $y = p_3 + p_1 x$.

2. Гиперболическая функция: $y = p_1 + \frac{p_2}{x}$.

3. Степенная функция: $y = p_2 x^{p_1}$.

4. Экспоненциальная функция: $y = p_2 e^{p_1 x}$.

<u>Указание.</u> Графики строить только для $x \geq 0$.

13.2. Для каждой из двух производственных функций $y = K^{p_1/(p_1+p_3)} L^{p_3/(p_1+p_3)}$ – функции Кобба-Дугласа и $y = p_1 K + p_2 L$ – линейной функции построить по три графика: по два графика затраты-выпуск (первый при $K = 10$, второй при $L = 5$) и изокванту, соответствующую $y = 3$.

13.3. Для каждой из двух производственных функций из предыдущего примера $y = K^{p_1/(p_1+p_3)} L^{p_3/(p_1+p_3)}$ – функции Кобба-Дугласа и $y = p_1K + p_2L$ – линейной функции получить аналитические выражения для средних величин, маржинальных величин, эластичностей по каждой из переменных. Также получить аналитические выражения для эластичности производства, предельной нормы замены труда капиталом и капитала трудом.

Раздел 4. Модели экономического равновесия. Макроуровень

Тема 15. Модели макроэкономического равновесия на рынке благ

Примеры решения типовых задач

15.1. Пусть домашние хозяйства 30% своего реального дохода используют на покупку отечественных благ и 15% – на приобретение импортных товаров; подоходный налог равен 25% независимо от величины дохода, оставшиеся 30% домашние хозяйства сберегают. Пусть также инвестиционный спрос предпринимателей характеризуется функцией $40 - 4i$. Государство планирует закупить 20 ед. благ, а заграница предъявляет спрос на 10 ед. отечественных благ. Определить условия экономического равновесия на рынке благ (уравнение кривой IS) и выписать выражение для функции эластичности дохода $E_iy(i)$ в зависимости от ставки банковского процента i.

Решение. Из условия задачи следует, что $Z_y = 0{,}15$; $T_y = 0{,}25$; $S_y = 0{,}3$; $G = 20$; $E = 10$, а на рынке благ установится равновесие, если $(0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15)y = 40 - i + 20 + 10$. Решив полученное уравнение, найдем выражение для кривой IS как функции $y(i)$: $y = 100 - \frac{10}{7} y \cong 100 - 1{,}44i$. После этого нетрудно рассчитать величину эластичности дохода относительно изменения банковского процента: $E_i y(i) = \frac{dy}{di} \times \frac{i}{y} = -\frac{1{,}44i}{100 - 1{,}44i}$.

15.2. Предположим, что равновесное состояние на рынке благ для некоторой экономики описывается уравнением $y = 0{,}6(y - T_y y) + I + G$, а ставка подоходного налога – 25%. Предположим, что государственные расходы $I + G$ упали с 100 до 98 (на 2%) и равновесная величина национального дохода снизилась в соответствии с моделью инвестиционного мультипликатора. На сколько процентных пунктов нужно поднять подоходный налог, чтобы компенсировать это снижение национального дохода?

Решение.

Определим вначале равновесное значение национального дохода, для чего решим уравнение $y = 0{,}6(y - 0{,}25y) + 100 \Rightarrow 0{,}55y = 100 \Rightarrow y \cong 182$.

В соответствии с моделью инвестиционного мультипликатора уменьшение национального дохода вследствие сокращения государственных расходов составило:

$$\Delta y = \frac{1}{(1 - C_{y^v} - C_{y^v} T_y)}(\Delta I + \Delta G) = -\frac{1}{1 - 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}25} 2 = -\frac{1}{0{,}25} 2 = -8.$$

Подставим эту величину в левую часть модели налогового мультипликатора:

$$-8 = -\frac{C_{y^v}}{(1 - C_{y^v} + C_{y^v} T_y)} \Delta T_y (y + \Delta y) \Rightarrow -8 = -\frac{0{,}6}{(1 - 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}25)} \Delta T_y (182 - 8) \Rightarrow$$

$$8 = 174 \frac{0{,}6}{0{,}55} \times \Delta T_y \Rightarrow \Delta T_y = \frac{8}{174} \times \frac{0{,}6}{0{,}55} = 0{,}05.$$

Полученный результат означает, что ставку налога нужно поднять с 25 до 30%, т.е. на пять процентных пунктов.

15.3. Поведение макроэкономических субъектов характеризуется следующими данными:

$$C = 0{,}7y^v + 100; I = 0{,}2y + 30; G = T; E = 250; T_y = 0{,}4; Z_y = 0{,}2.$$

Определить равновесную величину национального дохода.

Решение. Поскольку y = C + I + G + E – Z, то

$$y = [0{,}7(y - 0{,}4y) + 100] + (0{,}2y + 30) + 0{,}4y + 250 - 0{,}2y \Rightarrow y \cong 1727.$$

15.4. Спрос домашних хозяйств на отечественные блага характеризуется функцией $C = 0{,}7y + 50$, а на импортные – $Z_y = 0{,}2$. Спрос предпринимателей на инвестиции задан функцией $I = 400 - 60i$. Государство закупает 70 ед. благ, а заграница – 30. Вывести уравнение линии *IS*.

Решение. Линия *IS* – совокупность сочетаний y, i на рынке благ выводится из равенства:

$$y + Z = C + I + G + E \Rightarrow y + 0{,}2y = 0{,}7y + 50 + 400 - 60i + 70 + 30 \Rightarrow$$

$$0{,}5y = 550 - 60i \Rightarrow y = 1100 - 120i.$$

Задания по теме 15

15.1. Пусть домашние хозяйства $10p_1$% своего реального дохода используют на покупку отечественных благ и 10% – на приобретение импортных товаров; подоходный налог равен 15% независимо от величины дохода, оставшиеся $(100 - 10p_1 - 10 - 15)$% домашние хозяйства сберегают. Пусть также инвестиционный спрос предпринимателей характеризуется функцией $40 - p_2 i$. Государство планирует закупить 20 ед. благ, а заграница предъявляет спрос на p_3 ед. отечественных благ. Определить условия экономического равновесия на рынке благ (уравнение кривой *IS*) и выписать выражение для функции эластичности дохода $E_{i,y}(i)$ в зависимости от ставки банковского процента i.

15.2. Предположим, что равновесное состояние на рынке благ для некоторой экономики описывается уравнением $y=\frac{p_2}{15}(y-T_y y)+I+G$, а ставка подоходного налога – $5p_3$%. Предположим, что государственные расходы $I+G$ упали с 100 до 100 – p_1 (на p_1%) и равновесная величина национального дохода снизилась в соответствии с моделью инвестиционного мультипликатора. На сколько процентных пунктов нужно поднять подоходный налог, чтобы компенсировать это снижение национального дохода?

15.3. Поведение макроэкономических субъектов характеризуется следующими данными:

$$C=\frac{p_1}{10}y^v+100; I=0{,}2y+10p_2; G=T; E=250; T_y=\frac{p_3}{5}; Z_y=0{,}2.$$

Определить равновесную величину национального дохода.

15.4. Спрос домашних хозяйств на отечественные блага характеризуется функцией $C = 0{,}7y + 10p_2$, а на импортные – $Z_y = 0{,}2$. Спрос предпринимателей на инвестиции задан функцией $I = 400 - 10p_3 i$. Государство закупает 70 ед. благ, а заграница – $10p_1$. Вывести уравнение линии *IS*.

Тема 16. Модели равновесия на рынках денег и капитала

Примеры решения типовых задач

16.1. Предположим, что активы Центрального банка (денежная база) в некоторой стране составляют 250 усл. единиц. Предположим, что значение норматива минимального резервного покрытия равно 0,2, норматива кассовых остатков коммерческих банков – $\beta = 0{,}2 - i$, а доля наличных денег в общей сумме кредитов коммерческих банков – $\gamma = 0{,}35 - 2i$. Предположим также, что ставка процента возросла с 0,03 до 0,05. Определить, на сколько усл. единиц и на сколько % к первоначальному уровню изменилось количество наличных денег в обращении.

Решение. В соответствии с моделью кредитного мультипликатора и соотношением $MH = \gamma K$ рассчитаем величину наличных денег до и после повышения процентной ставки:

$$MH=\gamma K=\gamma\frac{1-\alpha-\beta}{[\alpha+\beta(1-\gamma))+\gamma(1-\alpha)]}H.$$

$$MH_0=\gamma K=0{,}29\frac{1-0{,}2-(0{,}2-0{,}03)}{[0{,}2+(0{,}2-0{,}03)(1-0{,}29)+0{,}29(1-0{,}2)]}250=0{,}29\frac{0{,}63}{0{,}55}250=83{,}04,$$

$$MH_1=\gamma K=0{,}25\frac{1-0{,}2-(0{,}2-0{,}05)}{[0{,}2+(0{,}2-0{,}05)(1-(0{,}35-2\times0{,}05))+(0{,}35-2\times0{,}05)(1-0{,}2)]}250=0{,}25\frac{0{,}65}{0{,}51}250=79{,}66.$$

Итак, в результате повышения процентной ставки с 0,03 до 0,05 количество наличных денег в стране уменьшилось на 3,38 усл. единиц, или на 4,07% по отношению к первоначальному уровню.

16.2. Предложение денег осуществляется по формуле $M = 200 + 4i$; скорость их обращения равна 20 оборотов за период, в течение которого создается реальный доход в размере 3000 единиц. Спрос домашних хозяйств на деньги по мотиву предосторожности равен 2% получаемого ими дохода, а реальный спрос на деньги как имущество характеризуется формулой $50 - 3i$.

1) Определить равновесную ставку процента;
2) построить график LM;
3) как изменится положение линии LM, если:
   а) скорость обращения денег снизится в 4 раза?
   б) уровень цен снизится на 20% (обе новые кривые LM нарисовать на том же графике).

<u>Решение</u>.

1) На рынке денег достигается равновесие при

$200 + 4i = \frac{1}{20} \times 3000 + 0{,}02 * 3000 + 50 - 3i \Rightarrow i = 8{,}6$.

2) Множество сочетаний y, i, обеспечивающих равновесие на рынке денег, определяется из равенства $200 + 4i = \frac{1}{20} \times y + 0{,}02 * y + 50 - 3i \Rightarrow$ $\Rightarrow 7y = 15\,000 + 700i \Rightarrow y = 2\,147 + 100i$.

3а) При снижении скорости обращения денег в 4 раза равновесие на рынке достигается:

при $200 + 4i = \frac{1}{\left(20/4\right)} \times y + 0{,}02 * y + 50 - 3i \Rightarrow 22y = 15\,000 + 700i \Rightarrow y = 681{,}8 + 31{,}8i$.

3б) При снижении на 20% уровня цен уравнение LM определится из равенства $(200 + 4i)/0{,}8 = \frac{1}{20} \times y + 0{,}02 * y + 50 - 3i \Rightarrow 250 + 5i = \frac{1}{20} \times y +$ $+ 0{,}02 * y + 50 - 3i \Rightarrow 7y = 20\,000 + 800i \Rightarrow y = 2857 + 114{,}3i$.

Задания по теме 16

16.1. Предположим, что активы Центрального банка (денежная база) в некоторой стране составляют $10 * (p_1 + p_2 + p_3)$ усл. единиц. Предположим, что значение норматива минимального резервного покрытия равно $0{,}035p_2$, норматива кассовых остатков коммерческих банков – $\delta\ell = 0{,}2 - 0{,}3p_3 i$, а доля наличных денег в общей сумме кредитов коммерческих банков – $\gamma = 0{,}35 - 0{,}4p_1 i$. Предположим также, что ставка процента возросла с 0,03 до 0,05. Требуется определить, на сколько условных единиц и на сколько процентов к первоначальному уровню изменилось количество наличных денег в обращении.

16.2. Предложение денег осуществляется по формуле: $M = 200 + p_1 i$; скорость их обращения равна $5p_2$ оборотов за период, в течение которого создается реальный доход в размере 3000 ед. Спрос домашних хозяйств на деньги по мотиву предосторожности равен p_3% получаемого ими дохода, а реальный спрос на деньги как имущество характеризуется формулой: $50 - 3i$.

1) требуется определить равновесную ставку процента;
2) построить график LM;
3) определить как изменится положение линии LM, если:
   а) скорость обращения денег снизится в 5 раз?
   б) уровень цен снизится на 20% (обе новые кривые LM нарисовать на том же графике)?

Тема 17. Модели совместного равновесия на рынках благ, денег и ценных бумаг

Примеры решения типовых задач

17.1. Спрос домашних хозяйств на отечественные блага выражается формулой: $C = 0{,}4y^v + 1000$, а на импортные: $Z = 0{,}1y$. Объем инвестиций равен: $I = 5000 - 1250i + 0{,}1y$. Государственные расходы в точности равны сумме подоходного налога, ставка которого составляет 25%. Экспорт страны равен 10 000 ед. благ. В обращении находится 20 000 денежных ед., а спрос на деньги для сделок и в качестве имущества соответственно представлен формулами:

$$L_{\text{сд}} = 0{,}6y;\; L_{\text{им}} = \frac{20\ 600}{i - 1{,}5} - 2\ 000.$$

Необходимо определить состояние торгового баланса страны при достижении совместного равновесия на рынках благ и финансовых рынках.

<u>Решение</u>.

Вспомним макроэкономические обозначения:

$y^v = y - T_y y = y - 0{,}25y$ – располагаемый (после уплаты налогов) доход; $G = T_y y = 0{,}25y$ – государственные расходы; $E = 10000$ – экспорт; $Z = 0{,}1y$ – импорт.

а) *Условие равновесия на рынке благ*:

$$y = C + I + G + E \Rightarrow$$

$$y = 0{,}4(y - 0{,}25y) + 1\ 000 + 5\ 000 - 1\ 250i + 0{,}1y + 0{,}25y + 10\ 000 - 0{,}1y \Rightarrow$$

$$y = 16\ 000 + 0{,}55y - 1250i$$

Уравнение линии IS : $y = 35\ 556 - 2\ 778i$.

б) *Условие равновесия на денежном рынке:*

$$M = L_{\text{сд}} + L_{\text{им}} \Rightarrow 20\ 000 = 0{,}6y + \frac{20\ 600}{i - 1{,}5} - 2\ 000.$$

Уравнение линии LM: $y = 36\ 667 - \dfrac{34\ 333}{i - 1{,}5}$.

в) *Условие совместного равновесия – IS=LM:*

$$35\ 556 - 2\ 778 \times i = 36\ 667 - \frac{34\ 333}{i - 1{,}5} \text{ или } 2\ 778 \times i^2 + 28\ 944 \times i - 84\ 000 = 0.$$

Отсюда $i^{\bullet}$ = 2,36 (положительное значение корня); $y^{\bullet} \approx$ 29 000; $Z^{\bullet} \approx$ 29 000; $E - Z$ = 10 000 – 2 900 = 7 100.

17.2. Ответ: экспорт превышает импорт на 7 100 денежных ед.

Количество находящихся в обращении денег равно 30 ед., а спрос на деньги выражается функцией $l = 2y - 150i$. Кроме того, известны функция потребления $C = 0{,}75y$ и функция инвестиций $I = 5 - 25i$.

1) Составьте уравнение функции совокупного спроса.

2) Как изменятся объем совокупного спроса и номинальная ставка процента при повышении уровня цен с 1 до 1,5 (номинальный уровень цен принят за 1)?

Решение.

1) Для определения функции совокупного спроса составим уравнение линии *IS*: $y = I + C = 5 - 25i + 0{,}75y$, решить это уравнение относительно i: $i = \frac{5 - 0{,}25y}{25} = 0{,}2 - 0{,}01y$. Затем составим уравнение линии *LM:* $\frac{30}{P} = 2y - 150i$ и подставим в это уравнение значение i, полученное из первого уравнения:

$$\frac{30}{P} = 2y - 150i = 2y - 150 \cdot (0{,}2 - 0{,}01y) \Rightarrow \frac{30}{P} = -30 + 0{,}5y \Rightarrow y = \frac{60}{P} + 60.$$

2) При P =1 совокупный спрос равен 60 + 60 = 120, а при P = 1,5 – 40 + 60 = 100, соответственно. Следовательно, совокупный спрос снизится на 20 ед. или на 17% по отношению к первоначальному уровню.

Найдем ставку процента при P = 1, решив для этого систему уравнений линий *IS* и *LM*:

$$\begin{cases} \frac{M}{P} = I \\ y = I + S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{1} = 2y - 150i \\ y = 5 - 25i + 0{,}75y \end{cases} \Rightarrow i = \frac{1}{35} = 0{,}028.$$

Соответственно при P = 1,5:

$$\begin{cases} \frac{M}{P} = I \\ y = I + S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{30}{1{,}5} = 2y - 150i \\ y = 5 - 25i + 0{,}75y \end{cases} \Rightarrow i = \frac{20}{35} \approx 0{,}057$$

Задания по теме 17

17.1. Спрос домашних хозяйств на отечественные блага выражается формулой: $C = \frac{p_1}{20} y^v + 2000$, а на импортные: Z = 0,2y. Объем инвестиций равен: I = 6000 – 125×p_2×i + 0,15y. Государственные расходы в точности равны сумме подоходного налога, ставка которого составляет 20%. Экспорт страны равен 12 000 ед. благ. В обращении находится 30 000 денежных ед., а спрос на деньги для сделок и в качестве имущества соответственно представлен формулами:

$$L_{\text{сд}} = \frac{p_3}{25} y;\ L_{\text{им}} = \frac{16\ 000}{i-2} - 1\ 000.$$

Определить состояние торгового баланса страны при достижении совместного равновесия на рынках благ и финансовых рынках.

17.2. Количество находящихся в обращении денег равно 10p_1 единиц, а спрос на деньги выражается функцией l = p_2y – 200i. Кроме того, известны функция потребления C = 0,75y и функция инвестиций I = 0,1×p_1×p_3 – 20i.

1) Составьте уравнение функции совокупного спроса.

2) Как изменятся объем совокупного спроса и номинальная ставка процента при повышении уровня цен с 2 до 2,5?

Тема 18. Модели равновесия на рынке труда

Примеры решения типовых задач

18.1. Цена предложения труда задана функцией $W_1^S = 0{,}7N + 12$ (1-й вариант: неоклассическая концепция – функция зависит от ставки заработной платы) и функцией $W_2^S = 0{,}7N + 12P$ (2-й вариант: кейнсианская концепция – функция зависит от изменения уровня цен). Технология производства представлена производственной функцией $y = 50N - N^2$. Исходный уровень цен принят за единицу (P_a = 1). Для 1-го варианта найти первоначальные уровни занятости и объема производства, а для каждого из вариантов – получить аналитическое выражение для функции совокупного предложения и, в предположении, что уровень цен повышается на 25% (P_b = 1,25), вычислить абсолютный и относительный эффекты занятости и производства.

Решение. Вначале определим цену спроса на труд. Она определяется из условия:

$$W^D = P \cdot A_N y \Rightarrow W^D = P \cdot A_N (50N - N^2) \Rightarrow W^D = P(50 - 2N).$$

Затем определим первоначальный уровень занятости (при P_a = 1): $W_1^S = W^D \Rightarrow 0{,}7N + 12 = 50 - 2N \Rightarrow N_a = 13{,}7$.

Тогда исходный объем производства $y_a = 50 \times 13{,}7 - 13{,}7^2 = 442{,}5$.

Пусть теперь уровень цен повышается на 25% : P_b = 1,25.

Расчет эффектов занятости и производства

1-й вариант	2-й вариант
найдем новый уровень занятости	
$0{,}7N_b + 12 = 1{,}25 \times (50 - 2N_b) \Rightarrow$ $N_b = 15{,}78$	$0{,}7N_b + 12 \times 1{,}25 = 1{,}25 \times (50 - 2N_b) \Rightarrow$ $N_b = 14{,}84$
вычислим значение абсолютного эффекта занятости	
$dN = N_b - N_a = 15{,}78 - 13{,}7 = 2{,}08$	$dN = N_b - N_a = 14{,}84 - 13{,}7 = 1{,}14$
вычислим значение относительного эффекта занятости	
$\frac{dN}{N_a}100\% = 15{,}1\%$	$\frac{dN}{N_a}100\% = 8{,}3\%$
найдем новый объем производства	
$y_b = 50 \times 15{,}78 - 15{,}78^2 = 540$	$y_b = 50 \times 14{,}84 - 14{,}84^2 = 521{,}8$
вычислим значение эффекта производства	
$dy = y_b - y_a = 540 - 442{,}5 = 97{,}5$	$dy = y_b - y_a = 521{,}8 - 442{,}5 = 79{,}3$
вычислим значение относительного эффекта производства	
$\frac{dy}{y_a} \times 100\% = 22{,}0\%$	$\frac{dy}{y_a} \times 100\% = 17{,}9\%$

Определение функции совокупного предложения производится в два этапа: вначале определяется равновесный уровень занятости из условия равенства цен спроса и предложения, а затем его значение подставляется в выражение для производственной функции:

1-й вариант	2-й вариант
$W^D = W_1^S \Rightarrow P(50 - 2N) = 0{,}7N + 12 \Rightarrow$ $50P - 12 = (2P + 0{,}7)N \Rightarrow N = \frac{50P - 12}{2P + 0{,}7}$	$W^D = W_2^S \Rightarrow P(50 - 2N) = 0{,}7N + 12P \Rightarrow$ $38P = (2P + 0{,}7)N \Rightarrow N = \frac{38P}{2P + 0{,}7}$
$y_1^S = 50 \cdot \frac{50P - 12}{2P + 0{,}7} - (\frac{50P - 12}{2P + 0{,}7})^2 \Rightarrow$ $y_1^S = \frac{2500P^2 + 1750P - 564}{4P^2 + 2{,}8P + 0{,}49}$	$y_2^S = 50 \cdot \frac{38P}{2P + 0{,}7} - (\frac{38P}{2P + 0{,}7})^2 \Rightarrow$ $y_2^S = \frac{2356P^2 + 1330P}{4P^2 + 2{,}8P + 0{,}49}$

18.2. Рассматривается неоклассическая модель общего экономического равновесия, в которой технология производства национального дохода задается производственной функцией $y = 50N - N^2$, функция сбережений имеет вид $S = 3 + 1{,}5i$, функция инвестиций – $I = 15 - 2i$, а функция предложения труда – $N^S = 3w + 2i$. В обращении находится 25 денежных ед., каждая из которых совершает пять оборотов за период производства национального дохода. Определить равновесные значения экономических параметров.

Решение. 1. Равновесная ставка процента определяется из равенства $I = S \Rightarrow 15 - 2i = 3 + 1{,}5i \Rightarrow i = 3{,}45;\ S^{\bullet} = I^{\bullet} = 8{,}1$.

Из условия максимизации прибыли $\frac{dy}{dN} = 50 - 2N = w$ найдем функцию спроса на труд: $N^D = 25 - 0{,}5w$. Следовательно, на рынке труда установится равновесие, если:

$$N^S = N^D \Rightarrow 3w + 2i\big|_{i=3,45} = 25 - 0{,}5w \Rightarrow$$

$$3w + 2 \times 3{,}45 = 25 - 0{,}5w \Rightarrow w^\bullet = 5{,}17 \Rightarrow N^\bullet = 22{,}41.$$

При такой занятости $y^S = 50 \cdot 22{,}41 - 22{,}41^2 = 618$.

Потребление домашних хозяйств составит $C^\bullet = y - S = 618 - 8{,}1 = 609{,}9$.

Тогда $y^D = C^\bullet + I^\bullet = 609{,}9 + 8{,}1 = 618$, $y^\bullet = y^S = y^D$.

Уровень цен находится из количественной теории денег:

$$P^\bullet = \frac{V}{y^\bullet} \times M = \frac{5}{618} \times 25 = 0{,}20.$$

18.3. Рассматривается кейнсианская модель общего экономического равновесия. Технология производства благ характеризуется производственной функцией $y = 50N - N^2$. Предельная склонность предпринимателей к инвестированию равна 60 ед.; предельная эффективность капитала – 15%. Поведение домашних хозяйств отображается функциями сбережений: $S = 0{,}2y$; спроса на импортные блага: $Z = 0{,}1y$; спроса на деньги: $L = 0{,}4y + 5(20 - i)$ и предложения труда: $N^S = 2W - 18$. Государство установило пропорциональную ставку подоходного налога 25%, государственные закупки на рынке благ равны 25 ед. Заграница покупает 15 ед. благ. В обращении находится 200 денежных ед. Денежная ставка заработной платы фиксирована на уровне 10 денежных ед. Определить производимый в стране национальный доход и состояние рынка труда.

Решение. 1) На основе приведенных данных составим уравнение линии IS и линии LM:

$$IS: S + T + Z = I + G + E \Rightarrow 0{,}2y + 0{,}25y + 0{,}1y = 60(15 - i) + 25 + 15 \Rightarrow i = 15{,}7 - 0{,}009y$$

$$LM: \frac{M}{P} = L(y, i) \Rightarrow \frac{200}{P} = 0{,}4y + 5(20 - i) \Rightarrow y = \frac{500}{P} + 12{,}5i - 250.$$

2) Подставим выражение для i, полученное из уравнения линии IS в преобразованное уравнение линии LM, получим функцию совокупного спроса: $y = \frac{500}{P} + 12{,}5(15{,}7 - 0{,}009y) - 250 \Rightarrow y^D = \frac{449{,}4}{P} - 48{,}3$.

3) При заданной денежной ставке зарплаты объем спроса предпринимателей на труд определится из равенства $W^S = P \times M_N y$:

$$10 = 50P - 2NP \Rightarrow N^D = 25 - \frac{5}{P}.$$

4) Следовательно, при данной технологии функция совокупного предложения имеет вид: $y^S = 50 \times (25 - \frac{5}{P}) - (25 - \frac{5}{P})^2$.

5) Чтобы определить равновесный уровень цен, нужно приравнять друг к другу функции совокупного спроса и совокупного предложения:

$$\frac{449{,}4}{P}-48{,}3=50\times(25-\frac{5}{P})-(25-\frac{5}{P})^2 \Rightarrow P^2-0{,}667P-0{,}037=0 \Rightarrow P^{\bullet}=0{,}385\ .$$

6) Определим производимый национальный доход: $y^{\bullet}=\frac{449{,}4}{0{,}385}-48{,}3=1118{,}7$, равновесный объем спроса на труд $N^{\bullet}=25-\frac{5}{0{,}385}=12$ и равновесную ставку процента $i^{\bullet}$ = 15,7 – 0,009$\times$1118,7 = 5,6. Поскольку при W^S = 10 объем предложения на рынке труда будет равен N^S = 2$\times$10 – 18 = 2, то дефицит трудовых ресурсов составит 12 – 2 = 10 ед. труда.

Задания по теме 18

18.1. Вывести неоклассическую и кейнсианскую функцию спроса на труд при использовании $10p_1$ ед. капитала и технологии, представленной производственной функцией $y=\sqrt[p_2+p_3]{N^{p_2}K^{p_3}}$.

18.2. Цена предложения труда задана функцией $W_1^S=p_1N+(p_2+p_3)$ (1-й вариант: неоклассическая концепция – функция зависит от ставки заработной платы) и функцией $W_2^S=p_1N+(p_2+p_3)P$ (2-й вариант: кейнсианская концепция – функция зависит от изменения уровня цен). Технология производства представлена производственной функцией $y=8p_2N-N^2$. Исходный уровень цен принят за единицу (P_a = 1). Для 1-го варианта найти первоначальные уровни занятости и объема производства, а для каждого из вариантов – получить аналитическое выражение для функции совокупного предложения и в предположении, что уровень цен повышается на $5p_3$%, вычислить абсолютный и относительный эффекты занятости и производства.

18.3. Рассматривается неоклассическая модель общего экономического равновесия, в которой технология производства национального дохода задается производственной функцией $y=7p_1\times N-p_2\times N^2$, функция сбережений имеет вид $S=p_2+2i$, функция инвестиций – $I=4p_3-3i$, а функция предложения труда – $N^S=2p_1\times w+3i$. В обращении находится 50 денежных ед., каждая из которых совершает p_2 оборотов за период производства национального дохода. Определить равновесные значения экономических параметров.

18.4. Рассматривается кейнсианская модель общего экономического равновесия. Технология производства благ характеризуется производственной функцией $y=50N-N^2$. Предельная склонность предпринимателей к инвестированию равна 60 ед.; предельная эффективность капитала – 15%. Поведение домашних хозяйств отображается функциями сбережений: $S=0{,}2y$; спроса на импортные блага: $Z=0{,}1y$; спроса на деньги: $L=0{,}4y+p_1(20-i)$

и предложения труда: $N^S = 3W - p_3$. Государство установило пропорциональную ставку подоходного налога 25%, государственные закупки на рынке благ равны 25 ед. Заграница покупает 15 ед. благ. В обращении находится 200 денежных ед. Денежная ставка заработной платы фиксирована на уровне p денежных ед. Определить производимый в стране национальный доход и состояние рынка труда.

Раздел 5. Модели экономической динамики

Тема 20. Модели экономической динамики

Примеры решения типовых задач

20.1. Страна располагает 256 ед. капитала и 32 ед. труда. Технология производства представлена производственной функцией $\sqrt[3]{N_t^2 K_t}$. Предельная склонность к сбережению равна 0,25. Система цен совершенно эластична.

1. Какой темп равновесного роста в описанных условиях не изменил бы производительность труда?

2. Что необходимо для достижения этого?

Решение. В условиях задачи для равновесного роста необходимо соблюдение равенства $S_y q_t - n\psi_t = 0 \Rightarrow 0{,}25 q_t = n\psi_t$.

Поскольку $y_t = \sqrt[3]{N_t^2 K_t} \Rightarrow K_t = \dfrac{y_t^3}{N_t^2}$ то $\psi_t \equiv \dfrac{y_t^3}{N_t^2} \Big/ N_t = \dfrac{y_t^3}{N_t^3} = q_t^3$. Тогда условие равновесного роста принимает вид $0{,}25 q_t = n q_t^3 \Rightarrow n = \dfrac{0{,}25}{q_t^2}$.

3. Поскольку $y_0 = \dfrac{\sqrt[3]{N_0^2 K_0}}{N_0} \Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{32^2 \times 256}}{32} = \dfrac{2^6}{32} = 2$, то для сохранения такой производительности труда необходим прирост трудовых ресурсов в размере $n = \dfrac{0{,}25}{2^2} = 0{,}0625$. В этом случае в заданных условиях будет равновесный 6,25% прирост национального дохода.

20.2. В период t_0 страна располагает 1000 ед. капитала и 25 ед. труда. Условия производства представлены производственной функцией $y_t = N_t^{0{,}7} \times K_t^{0{,}3}$. Темп прироста трудовых ресурсов составляет 1,5% в год за период. Приращение капитала в текущем периоде соответствует объему инвестиций в предыдущем периоде. Население сберегает 25% национального дохода. Вследствие совершенной гибкости цен в каждом периоде совокупный спрос равняется совокупному предложению при полном использовании труда и капитала.

1) Является ли экономический рост страны в рассматриваемом периоде равновесным?

2) При какой норме сбережений в исходных условиях в рассматриваемом периоде будет равновесный экономический рост?

3) Как изменится средняя производительность капитала в период t_6 по сравнению с периодом t_0? Чем объясняется это изменение и каков предел, к которому стремится производительность капитала в современных условиях?

Решение. 1) Равновесное состояние экономики определяется из равенства:

$$S_y q_t - n\psi_t = 0 \Rightarrow S_y \, {}^{y_t}\!/_{N_t} - n \, {}^{K_t}\!/_{N_t} = 0 \Rightarrow S_y (\frac{K_t}{N_t})^{0,3} - n \, {}^{K_t}\!/_{N_t} = 0 .$$

Рассмотрим, выполняется ли это равенство в начальный момент времени: $S_y (\frac{K_t}{N_t})^{0,3} - n \, {}^{K_t}\!/_{N_t} \Rightarrow 0,25 \times (\frac{1000}{25})^{0,3} - 0,015 \times (\frac{1000}{25}) = 0,38 \neq 0$.

Следовательно, экономический рост страны в рассматриваемом периоде является неравновесным.

2) Норму сбережений, которая обеспечит равновесный рост экономики, найдем из равенства:

$$S_y \times (\frac{1000}{25})^{0,3} - 0,015 \times (\frac{1000}{25}) = 0 \Rightarrow S_y = 0,015 \times (\frac{1000}{25})^{0,7} = 0,198 .$$

3) Для того чтобы ответить на вопрос об изменении средней производительности капитала в период t_6 по сравнению с периодом t_0 , рассчитаем изменение основных макроэкономических показателей до периода t_6. Этот расчет удобно производить на персональном компьютере с использованием программного средства для работы с электронными таблицами *EXCEL*. Представим соответствующие расчеты в таблице на отдельной странице (см. табл.).

После проведения расчетов и заполнения таблицы можем рассчитать, что средняя производительность капитала за период t_6 по сравнению с периодом t_0 возросла на 0,9 или на 2,25% по отношению к первоначальному уровню. Это увеличение вызвано увеличением капиталоемкости труда, что в свою очередь объясняется отставанием темпа прироста труда от темпа прироста капитала. Производительность капитала стремится к равновесному значению, определяемому равенством.

Задания по теме 20

20.1. Страна располагает 500 ед. капитала и 50 ед. труда. Технология производства представлена производственной функцией $\sqrt[p_1+p_2]{N_t^{p_1} \times K_t^{p_2}}$. Предельная склонность к сбережению равна $0,05p_3$. Система цен совершенно эластична.

1) Какой темп равновесного роста в описанных условиях не изменил бы производительность труда?

2) Что необходимо для достижения этого?

20.2. В период t_0 страна располагает 1500 ед. капитала и $15p_1$ ед. труда. Условия производства представлены производственной функцией $y_t = N_t^{0,7} \times K_t^{0,3}$. Темп прироста трудовых ресурсов составляет $0,5p_3$% в год за период. Приращение капитала в текущем периоде соответствует объему инвестиций в предыдущем периоде. Население сберегает $5p_2$% национального дохода. Вследствие совершенной гибкости цен в каждом периоде совокупный спрос равняется совокупному предложению при полном использовании труда и капитала.

1) Является ли экономический рост страны в рассматриваемом периоде равновесным?

2) При какой норме сбережений в исходных условиях в рассматриваемом периоде будет равновесный экономический рост?

3) Как изменится средняя производительность капитала в период t_6 по сравнению с периодом t_0? Чем объясняется это изменение и каков предел, к которому стремится производительность капитала в современных условиях?

Тема 21. Модели экономических циклов

Примеры решения типовых задач

21.1. В модели взаимодействия мультипликатора и акселератора Самуэльсона-Хикса $\begin{cases} y_t = (C_y + \kappa)y_{t-1} - \kappa y_{t-2} + A_t \\ C_t = C_\alpha + C_y y_{t-1} \end{cases}$ с начальными данными

$C_y = 0,8$, $A_0 = 300$, $A_1 = 500$, $A_2 = A_3 = \ldots = 500$.

Найти значения параметра κ, при которых величина национального дохода:

а) будет монотонно стремиться к равновесному значению;

б) будет стремиться к равновесному значению, пройдя через затухающие колебания;

в) будет колебательно изменяться с увеличивающейся амплитудой;

г) будет монотонно и неограниченно возрастать.

Для вариантов а и б найти также равновесное значение величины национального дохода.

Вычислить значение супермультипликатора Д. Хикса для любого значения параметра κ акселератора, который обеспечивает рост национального дохода в области *I*, если автономный спрос увеличивается с постоянным годовым темпом прироста 12%.

Решение. Для нахождения допустимых значений величины акселератора найдем решение нижеприведенных неравенств:

а) $\kappa < (2 - C_y) - 2\sqrt{1 - C_y} \Rightarrow \kappa < 2 - 0,8 - 2\sqrt{1 - 0,8} \Rightarrow \kappa < 0,26$;

б) $(2-C_y)-2\sqrt{1-C_y} < \kappa < 1 \Rightarrow 0{,}26 < \kappa < 1$;

в) $1 < \kappa < (2-C_y)+2\sqrt{1-C_y} \Rightarrow 1 < \kappa < 2-0{,}8+2\sqrt{1-0{,}8} \Rightarrow 1 < \kappa < 2{,}09$;

г) $\kappa > (2-C_y)+2\sqrt{1-C_y} \Rightarrow \kappa > 2{,}09$.

Равновесное состояние национального дохода найдем по формуле $\bar{y} = \frac{A}{1-C_y} = \frac{500}{1-0{,}8} = \frac{500}{0{,}2} = 2500$.

Для вычисления значения супермультипликатора Д. Хикса подставим в его формулу значение x = 0,12, взяв для параметра κ любое значение, удовлетворяющее условию $\kappa < 0{,}26$, например $\kappa = 0{,}2$:

$$\frac{1}{1-\frac{C_y+\kappa}{1+x}+\frac{\kappa}{(1+x)^2}} = \frac{1}{1-\frac{0{,}8+0{,}2}{1+0{,}12}+\frac{0{,}2}{(1+0{,}12)^2}} = \frac{1}{0{,}27} = 3{,}7.$$

Это означает, что национальный доход ежегодно будет возрастать на 3,7 ед. при ежегодном увеличении автономных инвестиций на единицу сверх их экзогенного роста в 1,12 раза.

Задания по теме 21

21.1. В модели взаимодействия мультипликатора и акселератора Самуэльсона-Хикса с начальными данными:

$C_y = \frac{p_1}{p_1+2}$, $A_0 = 100 \times p_2$, $A_1 = 150 \times p_2$, $A_2 = A_3 = \ldots = 150 \times p_2$

найти значения параметра κ, при которых величина национального дохода:

а) будет монотонно стремиться к равновесному значению;

б) будет стремиться к равновесному значению, пройдя через затухающие колебания;

в) будет колебательно изменяться с увеличивающейся амплитудой;

г) будет монотонно и неограниченно возрастать.

Для вариантов а и б найти также равновесное значение величины национального дохода.

Вычислить значение супермультипликатора Д. Хикса для любого значения параметра κ акселератора, который обеспечивает рост национального дохода в области I, если автономный спрос увеличивается с постоянным годовым темпом прироста p_3%.

Таблица

Расчеты макроэкономических показателей к задаче 5.2

Показатели	***t***						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
– количество трудовых ресурсов	25	25,38	25,76	26,14	26,53	26,93	27,34
K_t – количество капитала	1 000	1018,9	1038,1	1057,6	1077,5	1097,6	1118,1
$y_t = N_t^{0,7} K_t^{0,3}$ – объем национального дохода	75,61	76,83	78,07	79,33	80,61	81,91	83,23
$\psi_t = {K_t}/{N_t}$ капиталовооруженность труда	40	40,15	40,31	40,46	40,61	40,75	40,90
$q_t = {y_t}/{N_t}$ – средняя производительность труда	3,024	3,028	3,031	3,035	3,038	3,041	3,045
$\sigma_t = \frac{q_t}{\psi_t} = {y_t}/{K_t}$ – средняя производительность капитала	0,076	0,075	0,075	0,075	0,075	0,075	0,074
$\hat{y}_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$ – темп прироста национального дохода	-	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016
$\hat{K}_t = \frac{K_t - K_{t-1}}{K_{t-1}}$ – темп прироста капитала	-	0,019	0,019	0,018	0,018	0,018	0,018
$S_y q_t = 0,25 q_t$ – объем сбережений на единицу трудовых ресурсов	0,756	0,757	0,758	0,759	0,759	0,760	0,761
$n\psi_t = 0,015\psi_t$ – потребность в дополнительном капитале на единицу трудовых ресурсов	0,600	0,602	0,605	0,607	0,609	0,611	0,614

Математическое приложение

Тема 23. Оптимизационные задачи с ограничениями. Метод Лагранжа для решения задачи на условный экстремум

Примеры решения типовых задач

23.1. Найти максимум функции полезности (модель Р. Стоуна) $f(x_1;x_2)=(x_1-3)^{0,4}(x_2-6)^{0,6}$ в условиях бюджетных ограничений $2x_1+8x_2\le 100; x_1\ge 0, x_2\ge 0$, где x_1 и x_2 – два экономических блага (например, удовольствие и здоровье).

Заметим, что поскольку функция f $(x_1;$ $x_2)$ вогнута, ее максимальное значение достигается на границе множества бюджетных ограничений и задача может быть переформулирована для использования функции Лагранжа. Сделаем это. Функция Лагранжа здесь будет иметь вид:

$$F(x_1;x_2;\lambda)=(x_1-3)^{0,4}\times(x_2-6)^{0,6}+\lambda(100-2x_1-8x_2).$$

Приравняем к нулю ее частные производные:

$$\begin{cases} \partial F/\partial x_1 = 0,4\dfrac{(x_2-6)^{0,6}}{(x_1-3)^{0,6}}-2\lambda=0 \\ \partial F/\partial x_2 = 0,6\dfrac{(x_1-3)^{0,4}}{(x_2-6)^{0,4}}-8\lambda=0 \\ \partial F/\partial \lambda = 100-2x_1-8x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial F/\partial x_1 = 0,4\dfrac{f(x_1,x_2)}{(x_1-3)}-2\lambda=0 \\ \partial F/\partial x_2 = 0,6\dfrac{f(x_1,x_2)}{(x_2-6)}-8\lambda=0 \\ \partial F/\partial \lambda = 100-2x_1-8x_2=0 \end{cases}.$$

Выразим x_1 и x_2 из первых двух уравнений:

$$x_1=3-\frac{0,4f(x_1,x_2)}{2\lambda}=3-\frac{0,4}{2}\times\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda}=3-0,2\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda},$$

$$x_2=6-\frac{0,6f(x_1,x_2)}{8\lambda}=6-\frac{0,6}{8}\times\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda}=6-0,075\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda},$$

подставим эти выражения в третье уравнение и проведем необходимые упрощения:

$$100-2x_1-8x_2=0\Rightarrow 100-6+0,4\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda}-48+0,6\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda}=0\Rightarrow\frac{f(x_1,x_2)}{\lambda}=-46.$$

Подставим теперь выражение $\dfrac{f(x_1,x_2)}{\lambda}=-46$ в формулы для x_1 и x_2, приведенные выше. Получим:

$$x_1 = 3 - 0{,}2\frac{f(x_1, x_2)}{\lambda} = 3 + 0{,}2 \times 46 = 12{,}2,$$

$$x_2 = 6 - 0{,}075\frac{f(x_1, x_2)}{\lambda} = 6 + 0{,}075 \times 46 = 9{,}45.$$

Это означает, что для максимизации определенной выше функции полезности потребителю нужно приобрести 12,2 у.е.[1] «удовольствий» и 9,45 у.е. «здоровья». Общая (т.е. максимально возможная при данных бюджетных ограничениях) полезность при этом будет равна 4,53 у.е.

Задания по теме 23

23.1. Найти максимум функции полезности (модель Стоуна) $f(x_1; x_1) = (x_1 - 3)^{0,6}(x_2 - 3)^{0,4}$ в условиях бюджетных ограничений $p_1x_1 + p_2x_2 \le 25p_3$; $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, где x_1 и x_2 – два экономических блага (удовольствие и здоровье).

Тема 24. Математические соотношения между суммарными, средними и предельными величинами. Свойства эластичности и эластичность элементарных функций

Примеры решения типовых задач

24.1. Найдем величины x, при которых эластичность линейной функции $y = -3x + 12$ будет равна –1;0 и 1.

Решение. Запишем выражение для эластичности заданной функции $E(-3x+12) = \frac{-3x}{-3x+12}$ и решим три уравнения: $\frac{-3x}{-3x+12} = \begin{cases} -1 & \mathrm{x} = 2 \\ 0 \Rightarrow & x = 0 \\ 1 & x \to +\infty \end{cases}$.

24.2. Найдем величины x, при которых эластичность функции $y = x^3e^{-2x}$ будет равна –1;0 и 1.

Решение. Запишем выражение для эластичности заданной функции $E(x^3e^{-2x}) = 3 - 2x$ и решим три уравнения: $3 - 2x = \begin{cases} -1 & x = 2 \\ 0 \Rightarrow & x = 1{,}5 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

24.3. Найдем выражение для экономической функции $y(x)$, если ее эластичность задается формулой $E_x(y) = x^2 - 4x + 0{,}4$.

Решение. Для нахождения функции $y(x)$ решим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = x^2 - 4x + 0{,}4 \Rightarrow y = Ce^{\int (x - 4 + \frac{0{,}4}{x})dx} = Ce^{\frac{x^2}{2} - 4x + 0{,}4\ln x} = Cx^{0{,}4}e^{\frac{x^2}{2} - 4x}.$$

---

[1] У. е. – условные единицы.

24.4. Найдем выражение для экономической функции $y(x)$, если ее эластичность задается формулой $E_x(y) = 2xe^{3x}$.

Решение. Для решения обратной задачи – восстановления функции $y(x)$ по заданному выражению для ее эластичности – решим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} = 2xe^{3x} \Rightarrow y = Ce^{\int 2e^{3x}dx} = \frac{2}{3}Ce^{3x}.$$

24.5. Функции эластичности спроса по цене, эластичности предложения по цене и перекрестной эластичности спроса могут быть источником содержательно интересных экономических задач. Так, например, часто бывает важно установить, является ли функция эластичной в данной точке (при данной цене), если нам известно аналитическое выражение для этой функции, либо она задана в нескольких точках.

Издательство обнаружило, что при цене 12 руб. оно смогло продать 1000 экземпляров книги в неделю, а после повышения цены до 16 руб. – 800 экземпляров. Определить экономическую целесообразность первого повышения цены на книгу, оптимальную цену книги, при которой недельная выручка от ее продажи будет максимальной и величину этой выручки предполагая:

а) линейность функции спроса на книгу от ее цены;

б) линейность функции эластичности спроса на книгу от ее цены.

Решение.

а) Если функция спроса линейно зависит от цены на книгу, то ее уравнение легко получить из условия прохождения прямой линии через две точки: (P_1,Q_1) и (P_2,Q_2), где $P_1 = 12$; $Q_1 = 1\ 000$; $P_2 = 16$; $Q_2 = 800$. Данному условию удовлетворяет следующее уравнение:

$\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1} = \frac{P-P_1}{P_2-P_1} \Rightarrow \frac{Q-1000}{800-1000} = \frac{P-12}{16-12} \Rightarrow Q = 1600 - 50P$. Эластичность полученной функции спроса будет определяться выражением $E_P(Q) = \frac{-50P}{1600-50P}$, значение $E_P(Q) = -1$ (условие максимальной выручки) достигается при $P = 16$, а величина максимальной выручки равна $R = P \times Q = 16 \times 800 = 12\ 800$ руб. Можно сделать вывод о том, что в данной экономической ситуации повышение цены на книгу с 12 до 16 руб. было полностью экономически обосновано.

б) Предположим, что линейная зависимость эластичности спроса от цены выражается следующей формулой: $E_P(Q) = A + B \times P$, где A и B – неизвестные постоянные коэффициенты. Для нахождения этих коэффициентов вначале решим обратную задачу восстановления неизвестной функции спроса по заданному выражению для ее эластичности: $Q = Ce^{\int (\frac{A}{P} + B)dP} = Ce^{A\ln P + BP} = CP^A e^{BP}$. Положим C=1 и составим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов A и B из условия прохождения графика функции спроса через точки (P_1,Q_1) и (P_2,Q_2):

$$\begin{cases} 1000 = 12^A e^{12B} \\ 800 = 16^A e^{16B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 1000 = A\ln 12 + 12B \\ \ln 800 = A\ln 16 + 16B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6{,}9 = 2{,}48A + 12B \\ 6{,}68 = 2{,}77 + 16B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \approx 4 \\ B \approx -0{,}26 \end{cases}.$$

Таким образом, выражение для функции эластичности спроса принимает вид $E_P(Q)$ = 4 – 0,26×P. Чтобы вычислить выручку, нам необходимо восстановить вид функции спроса и вычислить значение P, при котором достигается максимум выручки:

$$Q = P^A e^{BP} = P^4 e^{-0{,}26P} \Rightarrow R = PQ = P^5 e^{-0{,}26P} \Rightarrow$$

$$R'_P = (5 - 0{,}26P) \times P^4 e^{-0{,}26P} \Big|_{R'_P = 0 \text{ - условие максимума}} \Rightarrow P = \frac{5}{0{,}26} = 19{,}23.$$

Подставим полученное значение P в формулу для выручки и получим ее величину при новой цене:

$R = P^5 e^{-0{,}26P} = 19{,}23^5 e^{-0{,}26\times 19{,}23} \cong 17722$ руб. (Можно проверить, что значение эластичности функции спроса по цене при P = 19,23 руб. практически совпадает с –1). Полученный результат свидетельствует о том, что цену на книгу необходимо повысить.

24.6. Предположим, что функция спроса на книгу находится из решения предыдущей задачи (вариант а) и равна Q = 1600 – 50P. Предположим также, что функция предложения зависит от P по параболическому закону Q^S = 100 + A×P^2, где A – неизвестный параметр. Найти выражение для функции эластичности предложения по цене, а также значение параметра A при условии, что эластичность предложения равна 1 при цене, оптимальной для покупателей данной книги (которая предполагается известной из решения предыдущей задачи и определяется из исследования функции спроса). Найти также величину предложения при оптимальной цене.

<u>Решение</u>. Вначале найдем выражение для функции эластичности предложения: $E_P(100 + A\times P^2) = \dfrac{2A\times P^2}{100 + A\times P^2}$. Затем найдем аналитическое выражение для параметра A, при котором E_P = 1:

$\dfrac{2A\cdot P^2}{100 + A\times P^2} = 1 \Rightarrow A = \dfrac{100}{P^2}$. Из того, что при оптимальной цене спроса (которая, в соответствии с решением предыдущей задачи, равна 16 руб.) эластичность предложения равна единице, рассчитаем значение параметра A: $A = \dfrac{100}{16^2} = 0{,}39$. Теперь найдем величину предложения по оптимальной цене 16 руб.: S = 100 + A×P^2 => 100 + 0,39×16^2 200.□= 199,8 =

24.7. Рассмотрим, каким образом можно из аналитического вида одной из основных экономических функций (суммарная величина, средняя величина, предельная величина и функция эластичности) вывести остальные. Рассмотрим четыре возможных случая:

1. Пусть заданная суммарная величина представляет собой некоторую функцию $y_S(x)$. Тогда $Ay_S(x)=\dfrac{y_S(x)}{x}$; $My_S(x)=\dfrac{dy_S(x)}{dx}$; $Ey_S(x)=\dfrac{dy_S(x)}{dx}\dfrac{x}{y_S(x)}$.

2. Пусть теперь задана некоторая функция $y_a(x)$, являющаяся средней величиной для неизвестной суммарной величины (функции) $y_S(x)$. Из условия следует, что $Ay_S(x) = y_a(x)$. Теперь уже можно определить исходную суммарную величину $y_S(x)$ и остальные функции: предельную величину и эластичность:

$$y_s(x)=x\times y_a(x);\ My_s(x)=\frac{dy_s(x)}{dx}=y_a(x)+x\frac{dy_a(x)}{dx};$$

$$Ey_s(x)=\frac{My_s(x)}{Ay_s(x)}=(y_a(x)+x\frac{dy_a(x)}{dx})\times\frac{1}{y_a(x)}=(1+Ey_a(x).$$

3. Следующий вариант представляет выражение $y_m(x)$, которое теперь является предельной функцией для неизвестной функции $y_S(x)$: $My_S(x) = y_m(x)$. В этом случае

$$y_S(x)=\int y_m(x)dx;\ Ay_S(x)=\frac{1}{x}\int y_m(x)dx;$$

$$Ey_S(x)=\frac{My_S(x)}{Ay_S(x)}=\frac{x\times y_m(x)}{\int y_m(x)dx}.$$

4. В четвертом варианте задается функция $y_e(x)$, которая является функцией эластичности для неизвестной функции $y_S(x)$: $Ey_S(x) = y_m(x)$. В этом случае

$$y_S(x)=Ce^{\int y_m(x)dx};\ Ay_S(x)=C\frac{1}{x}e^{\int y_m(x)dx};$$

$$Ey_S(x)=\frac{My_S(x)}{Ay_S(x)}\Rightarrow My_S(x)=Ay_S(x)\times Ey_S(x)=C\frac{y_m(x)}{x}e^{\int y_m(x)dx}.$$

Задания по теме 24

24.1. Найти величины x, при которых эластичность линейной функции $y=-p_1x+5p_3$ будет равна –1;0 и 1.

24.2. Найти величины x, при которых эластичность экономической функции $y=x^{p_2}e^{-p_1x}$ будет равна –1;0 и 1.

24.3. Найти выражение для экономической функции $y(x)$, если ее эластичность задается формулой $E_x(y)=p_1x^2-2p_2x+0{,}1p_3$.

24.4. Найти выражение для экономической функции $y(x)$, если ее эластичность задается формулой $E_x(y)=p_3xe^{p_2x}$.

24.5. (Теоретическое задание). Показать, что для произвольной функции спроса по цене $Q = Q(P)$ максимум выручки $R = P\times Q(P)$ будет достигаться всегда при том значении цены, при котором эластичность спроса по цене равна –1. Для этого выписать необходимое условие оптимальности $\frac{dR}{dP} = 0$ и преобразовать его так, чтобы в левой части оказалось выражение для эластичности $E_P(Q)$.

24.6. Издательство обнаружило, что при цене p_1 руб. оно смогло продать 1000 экземпляров книги в неделю, а после повышения цены до $p_1 + p_3$ руб. – 800 экземпляров. Определить экономическую целесообразность первого повышения цены на книгу, оптимальную цену книги, при которой недельная выручка от ее продажи будет максимальной и величину этой выручки предполагая:

а) линейность функции спроса на книгу от ее цены;

б) линейность функции эластичности спроса на книгу от ее цены.

24.7. Предположим, что функция спроса на книгу находится из решения предыдущей задачи (вариант а). Предположим также, что функция предложения зависит от P по параболическому закону $S = 100 + A \times P^2$, где A – неизвестный параметр. Найти выражение для функции эластичности предложения по цене, а также значение параметра A при условии, что эластичность предложения равна 1 при цене, оптимальной для покупателей данной книги (которая предполагается известной из решения предыдущей задачи и определяется из исследования функции спроса). Найти также величину предложения при оптимальной цене.

24.8. Для заданной функции $y_a(x) = p_3 x^{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}$, которая является средним значением некоторой неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, найти выражения для неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, ее предельной величины $y_m(x)$ и эластичности $y_e(x)$.

24.9. Для заданной функции $y_m(x) = p_2 + \frac{p_1}{x}$, которая является предельным значением некоторой неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, найти выражения для неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, ее средней величины $y_a(x)$ и эластичности $y_e(x)$.

24.10. Для заданной функции $y_e(x) = p_1 + p_3 x$, которая является функцией эластичности для некоторой неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, найти выражения для неизвестной суммарной функции $y_S(x)$, ее средней величины $y_a(x)$ и предельной величины $y_m(x)$.

Поисковые и практические задания (ППЗ) предназначены для самостоятельной исследовательско-поисковой работы. ППЗ представляют собой блоки заданий по конкретным темам, в которых концентрируется наиболее значимый, наукоемкий программный материал данной учебной дисциплины.

Обучающемуся необходимо выполнить в произвольном виде (письменная работа по курсу не предусмотрена) все задания без исключения. По каждой проблеме целесообразно иметь собственное мнение, подкрепленное знанием теории, источников, включая новейшие издания и публикации. Полученные выводы обучающийся должен уметь использовать при проведении коллоквиума в системе «Прометей» и итоговом компьютерном тестировании (экзамены и зачеты в МИЭП проводятся по тестам, составленным строго по заданиям ППЗ).

При выполнении ППЗ обучающийся обязан изучить все источники и литературу, рекомендованные в учебно-методическом пособии.

Дополнительную консультацию по выполнению ППЗ обучающийся может получить у преподавателей дисциплины или в деканате.

Основная литература

1. Алексеенко В.Б., Коршунов Ю.С., Красавина В.А. Математические модели в экономике: учебное пособие. – М.: РУДН, 2013. (ЭБС)
2. Грачева М.В., Черемных Ю.Н. Моделирование экономических процессов: учебник. – М.: Юнити-Дана, 2013. (ЭБС)
3. Гусева Е.Н. Экономико-математическое моделирование. Учебное пособие. – М.: Флинта, 2011. (ЭБС)
4. Шапкин А.С., Шапкин В.А. Математические методы и модели исследования операций. Учебник. Гриф МО РФ. – М.: Дашков и К, 2012. (ЭБС)

Дополнительная литература

5. Акинин П.В., Королев В.А., Кочергин С.Г., Торопцев Е.Л. Математические и инструментальные методы экономики : учеб. пособие для бакалавров : учеб. пособие для вузов. - М.: Кнорус, 2012.
6. Васильева Л.Н., Деева Е.А. Моделирование микроэкономических процессов и систем : учебник. - М.: Кнорус, 2012.
7. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование. – М.: Дашков, 2012.
8. Малыхин В. Математическое моделирование социально-экономической структуры общества. – СПб.: Ленанд, 2015.

9. Моделирование микроэкономических процессов и систем: учебник / Л.Н. Васильева, Е.А. Деева. - М.: Кнорус, 2012.

10. Новиков, А.И. Модели финансового рынка и прогнозирование в финансовой сфере : учеб. пособие / А.И. Новиков. - М.: Инфра-М, 2014.

11. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие. Гриф УМО. – М.: Инфра-М, 2013.

12. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. Практическое пособие по решению задач. – М.: Вузовский учебник, 2013.

13. Панюков А. Математическое моделирование экономических процессов. – СПб.: Ленанд, 2015.

14. Савиных В.Н. Математическое моделирование производственного и финансового менеджмента. – М.: КноРус, 2015.

15. Федосеев В.В. Математическое моделирование в экономике и социологии труда. Методы, модели, задачи: учебное пособие. – М.: Юнити-Дана, 2012.

16. Федоткин И.М. Математическое моделирование технологических процессов. М.: Либроком, 2011.

17. Федоткин И. Математическое моделирование технологических процессов. – СПб.: Ленанд, 2015.

18. Экономико-математические методы в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / под ред. А.Н. Гармаша. - М.: Вузовский учебник, 2014.

Адреса сайтов в Интернете

- http://www.alleng.ru/d/econ/econ245.htm - Моделирование экономических процессов. Под ред. Грачевой М.В., Фадеевой Л.Н., Черемных Ю.Н.
- http://ecnmx.ru/down - Economix - полнотекстовая электронная библиотека. Учебники по экономико-математическому моделированию - 18 наименований
- http://studyspace.ru/remository/elektronnyie-uchebniki/emm/matematicheskoe-modelirovanie-i-issledovanie-natsionalnoy-ekonomiki-uchebnoe-posobie.html - Математическое моделирование и исследование национальной экономики. Учебное пособие.
- http://www.krelib.com/finansy__kredit__denejnoe_obrashenie/5177 - Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок Медведев Г.А.